Predicados e Quantificadores

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Lógica de predicados: Introdução

- A lógica proposicional, que estudamos até agora, cobre a análise de proposições compostas, i.e., proposições simples ligadas por conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ...
- Entretanto, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar todas as afirmações matemáticas.
- Por exemplo, suponha que saibamos que

  1. *"Todos os matriculados em Matemática Discreta são alunos dedicados"*, e que
  2. *"Alice está matriculada em Matemática Discreta"*.

  Intuitivamente, podemos, então, concluir que

  3. *"Alice é uma aluna dedicada."*

  Este tipo de inferência só é possível após introduzirmos o conceito de predicados e quantificadores, que é o que faremos aqui.

Predicados

Predicados: Introdução

- Afirmações como as seguintes são comuns em matemática:

  1. $x \geq 12$,
  2. $x + y = z$,
  3. O aluno x tirou a maior nota da sala na prova.

- Tais afirmações são escritas em termos de variáveis.

  A menos que os valores das variáveis sejam especificados, as afirmações não são verdadeiras nem falsas.

  Como não possuem valor de verdade, elas não são proposições.

Predicados: Introdução

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$ A afirmação

"x é um número real"

pode ser dividida em duas partes:

1. a primeira parte, a **variável** x, é o sujeito da afirmação,
2. a segunda parte "é um número real" é um **predicado**, ou seja, uma propriedade que o sujeito da afirmação pode ou não satisfazer.

A afirmação *"x é um número real"* pode ter valores de verdade diferentes dependendo do valor que a variável x assumir.

- Quando $x = \pi$, a afirmação *"x é um número real"* é verdadeira.
- Quando $x = \sqrt{-2}$, a afirmação *"x é um número real"* é falsa.

Predicados: Introdução

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$ (Continuação)

Podemos ver esta afirmação como uma **função proposicional**

$P(x)$: *"x é um número real"*

que mapeia valores de x para valores de verdade (verdadeiro ou falso):

- $P(\pi)$ é verdadeiro.
- $P(\sqrt{-2})$ é falso.

◁

Predicados

- Um **predicado** é uma sentença que contém um número finito de variáveis e que se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.

  Intuitivamente, predicados dão qualidades a sujeitos; relacionam sujeitos entre si; ou relacionam sujeitos a objetos.

- Os predicados são classificados de acordo com o número de suas variáveis.

  Um predicado $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis é chamado de um **predicado n-ário**.

Predicados

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$ Seja $P(x)$ o predicado unário (de 1 variável) "$x \geq 10$".
  - $P(15) = T$,

    pois substituindo x por 15 em "$x \geq 10$", obtemos uma afirmação <u>verdadeira</u>.
  - $P(\pi) = F$,

    pois substituindo x por π em "$x \geq 10$", obtemos uma afirmação <u>falsa</u>.

◁

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$ Seja $P(x, y)$ o predicado binário *"x nasceu no país y"*.
  - $P(\texttt{Ayrton Senna}, \texttt{Brasil}) = T$,

    pios substituindo x por `Ayrton Senna` e y por `Brasil` em *"x nasceu no país y"*, obtemos uma afirmação <u>verdadeira</u>.
  - $P(\texttt{Michael Jackson}, \texttt{Rússia}) = F$,

    pois substituindo x por `Michael Jackson` e y por `Rússia` em *"x nasceu no país y"*, obtemos uma afirmação <u>falsa</u>.

◁

Predicados

- $\boxed{\text{Exemplo 4:}}$ Seja $P(x, y, z)$ o predicado ternário *"$x + y = z$"*.
  - $P(1, 4, 5) = T$,

    pios substituindo x por 1, y por 4 e z por 5 em *"$x + y = z$"*, obtemos uma afirmação verdadeira.
  - $P(4, 5, 1) = F$,

    pois substituindo x por 4, y por 5 e z por 1 em *"$x + y = z$"*, obtemos uma afirmação falsa.
  - $P(0, 0, 0) = T$,

    pois substituindo x por 0, y por 0 e z por 0 em *"$x + y = z$"*, obtemos uma afirmação verdadeira.

$\triangleleft$

Quantificadores: Introdução

- Como um predicado não tem valor de verdade em si, é preciso instanciar os valores de suas variáveis para transformá-lo em uma proposição.
- Para transformar um predicado em uma proposição, podemos
  1. atribuir valores específicos para todas variáveis (como fizemos até agora), ou
  2. quantificar em qual faixa de valores de x a proposição pode ser considerada verdadeira.

     Em português, usamos palavras como "*nenhum*", "*todos*" e "*algum*" para quantificar predicados.

     Por exemplo, o predicado *"O computador x do laboratório está ligado"* não tem valor de verdade em si, mas as seguintes proposições têm:
     1. *"Nenhum computador do laboratório está ligado."*
     2. *"Todos os computadores do laboratório estão ligados."*
     3. *"Algum computador do laboratório está ligado."*

Quantificadores: Domínio ou universo de discurso

- Dado um predicado de várias variáveis, o **domínio de discurso**, ou **universo de discurso**, ou simplesmente **domínio** é o conjunto de valores que as variáveis podem, em princípio, assumir.
  1. No predicado

     $$\text{"}x \geq 2\text{"},$$

     o domínio de discurso pode ser o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ ou o dos inteiros $\mathbb{Z}$.
  2. No predicado

     "A pessoa x nasceu no país y",

     o domínio de x pode ser o conjunto de todas as pessoas, e o domínio de y pode ser o conjunto de países no mundo.
- O domínio de um predicado é essencial para sua quantificação.

Quantificador universal

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação universal** é

  $$\forall x : P(x)$$

  significando

  "Para todos os valores x no domínio, $P(x)$ é verdadeiro"

  ou simplesmente

  "Para todo x no domínio, $P(x)$"
- O símbolo $\forall$ é o símbolo de **quantificador universal**.
- A proposição $\forall x : P(x)$ é
  - verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio,
  - falsa se há algum x no domínio tal que $P(x)$ seja falso.

    Um elemento x para o qual $P(x)$ é falso é um **contra-exemplo** para $\forall x : P(x)$.

Quantificação universal

- $\boxed{\text{Exemplo 5:}}$ Considere o universo de discurso $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A proposição

$$\forall x : x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos que

$$1^2 \geq 1, \quad 2^2 \geq 2, \quad 3^2 \geq 3, \quad 4^2 \geq 4, \text{ e } \quad 5^2 \geq 5.$$

Portanto a proposição é verdadeira. $\triangleleft$

Quantificação universal

- É possível definir o universo de discurso já na proposição quantificada:
  1. $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.
  2. $\forall y \in \mathbb{Z}^+ : -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.
- $\boxed{\text{Exemplo 6:}}$ A proposição

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos o contra-exemplo

$$(1/2)^2 = 1/4 \ngeq 1/2,$$

e portanto a proposição é falsa. $\triangleleft$

Quantificação existencial

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação existencial** é

$$\exists x : P(x)$$

significando

"Existe um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro"

ou simplesmente

"Existe x no domínio tal que $P(x)$"

- O símbolo $\exists$ é o símbolo de **quantificador existencial**.
- A proposição $\exists x : P(x)$ é
  - verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para ao menos um x no domínio,
  - falsa se para todo x no domínio $P(x)$ é falso.

  Um elemento x para o qual $P(x)$ é verdadeiro é uma **testemunha** para $\exists x : P(x)$.

Quantificação existencial

- $\boxed{\text{Exemplo 7:}}$ Seja $E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo de discurso. A proposição

$$\exists m : m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Analisando todos os casos, obtemos

$$5^2 = 25 \neq 5, \quad 6^2 = 36 \neq 6, \quad 7^2 = 49 \neq 7,$$

$$8^2 = 64 \neq 8, \quad 9^2 = 81 \neq 9, \text{ e } \quad 10^2 = 100 \neq 10.$$

Portanto a proposição é falsa. $\triangleleft$

Quantificação existencial

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$ A proposição

$$\exists m \in \mathbb{Z} : m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.
Temos que $1^2 = 1$, portanto $m^2 = m$ para pelo menos um inteiro m.

Logo a proposição é verdadeira.

$\triangleleft$

Quantificadores com domínio restrito

- Frequentemente usamos abreviações para restringir o domínio de um quantificador.

  Por exemplo, considere o universo de discurso como sendo os números reais.

  1. A proposição quantificada

  $$\forall x < 0 : x^2 > 0$$

  significa $\forall x : (x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$.

  Note que a proposição <u>não significa</u> $\forall x : (x < 0 \land x^2 > 0)$.

  2. A proposição quantificada

  $$\exists y > 0 : (y^2 = 2)$$

  significa $\exists y : (y > 0 \land y^2 = 2)$.

  Note que a proposição <u>não significa</u> $\exists y : (y > 0 \rightarrow y^2 = 2)$.

Ordem de precedência dos quantificadores

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm precedência sobre todos os operadores da lógica proposicional ($\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ...).

  1. A proposição

  $$\forall x : P(x) \lor Q(x)$$

  significa $(\forall x : P(x)) \lor Q(x)$.

  Note que a proposição <u>não significa</u> $\forall x : (P(x) \lor Q(x))$.

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Quando um quantificador é utilizado em uma variável x, dizemos que x é uma **variável ligada**.

  Uma variável que não é ligada a nenhum quantificador é chamada de **variável livre**.

  1. Em

  $$\forall x : x + y = 2,$$

  x é uma variável ligada, e y é uma variável livre.

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Cada quantificador tem um **escopo** sobre o qual ele vale.

  1. Em

     $$\exists x : (P(x) \land Q(x)) \lor \forall x : R(x)$$

     todas as variáveis são ligadas, mas o escopo de cada x é diferente.

     O primeiro quantificador, $\exists x$, tem como escopo apenas $(P(x) \land Q(x))$.

     O segundo quantificador, $\forall x$, tem como escopo apenas $R(x)$.

     Podemos renomear variáveis ligadas em escopos diferentes sem alterar a expressão lógica (o que muitas vezes torna a expressão mais fácil de ser lida):

     $$\exists x : (P(x) \land Q(x)) \lor \forall y : R(y)$$

Equivalências lógicas envolvendo quantificadores

- Afirmações envolvendo predicados são logicamente equivalentes se, e somente se, elas têm o mesmo valor de verdade independentemente de quais predicados e domínios de discurso são utilizados.

  Usamos

  $$S \equiv T$$

  para denotar que S e T são equivalentes.

Negando expressões quantificadas

- A negação de expressões quantificadas é dada por equivalências conhecidas como **leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan para negação
$\neg\forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

- Equivalências consequentes das leis de De Morgan são:

Outras equivalências de negação
$\forall x : P(x) \equiv \neg\exists x : \neg P(x)$
$\exists x : P(x) \equiv \neg\forall x : \neg P(x)$

Negando expressões quantificadas universais

- Exemplo 9:

  P : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

  $\neg P$: $\neg\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$

  $\triangleleft$

- Exemplo 10:

  P : *"Todos os programas de computador são finitos."*

  $\neg P$: *"Nem todos os programas de computador que são finitos."* $\equiv$ *"Existe um programa de computador que não é finito."*

  $\triangleleft$

- Exemplo 11:

  P : *"Todo mundo gosta de sorvete ou de bolo."*

  $\neg P$: *"Nem todo mundo gosta de sorvete ou de bolo."* $\equiv$ *"Existe uma pessoa que não goste de sorvete nem de bolo."*

  $\triangleleft$

Negando expressões quantificadas existenciais

- Exemplo 12:

$P: \quad \exists x \in \mathbb{N} : x^2 = x$

$\neg P: \quad \neg \exists x \in \mathbb{N} : x^2 = x \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N} : \neg(x^2 = x) \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq x$

$\lhd$

- Exemplo 13:

P : *"Alguns peixes respiram ar."*

$\neg P$: *"Nenhum peixe respira ar."*

$\lhd$

- Exemplo 14:

P : *"Alguns esportistas são brasileiros e jovens."*

$\neg P$: *"Nenhum esportista é brasileiro e jovem."* $\equiv$
"Todo esportista não é brasileiro ou não é jovem."

$\lhd$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- Exemplo 15: Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
  - *"Nenhuma arara é pequena."*
  - *"Araras são multicores e grandes."*
  - *"Existe uma arara que não é multicor, nem pequena."*

Solução.

Primeiro tomamos como universo de discurso o conjunto de todos os animais, então definimos os seguintes predicados:

$A(x)$: *"x é uma arara"*

$M(x)$: *"x é multicor"*

$P(x)$: *"x é pequeno"*

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- Exemplo 15: (Continuação)

Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal como abaixo.

(Nesse problema, assumimos que uma arara ou é grande ou é pequena.)

- *"Nenhuma arara é pequena"*:

$$\neg \exists x : (A(x) \wedge P(x))$$

Forma equivalente:

$$\forall x : (A(x) \rightarrow \neg P(x))$$

- *"Araras são multicores e grandes"*:

$$\forall x : (A(x) \rightarrow (M(x) \wedge \neg P(x)))$$

- *"Existe uma arara que não é multicor, nem pequena"*:

$$\exists x : (A(x) \wedge \neg M(x) \wedge \neg P(x))$$

$\lhd$

Quantificadores aninhados

Quantificadores aninhados: Introdução

- Muitas expressões usam múltiplos **quantificadores aninhados**.

  Por exemplo, no universo de discurso dos números reais, temos o seguinte.

  1. A expressão
  $$\forall x : \forall y : ((x > 0) \land (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$
  significa

     "O produto de quaisquer dois reais de sinais opostos é um real negativo."

  2. A expressão
  $$\forall x : \exists y : (x + y = 0)$$
  significa

     "Todo número real tem um número real oposto (isto é, que somado ao original resulta em zero)."

- Nesta seção estudaremos quantificadores aninhados.

Entendendo quantificadores aninhados

- Exemplo 16: Sejam o seguinte predicado sobre o domínio de todas as pessoas:

  $$A(x, y) : \quad \text{"A pessoa } x \text{ ama a pessoa } y\text{"}$$

  - $\forall x : \exists y : A(x, y)$ significa *"Todo mundo ama alguém."*
  - $\exists y : \forall x : A(x, y)$ significa *"Existe alguém que é amado por todo mundo."*
  - $\forall y : \exists x : A(x, y)$ significa *"Todo mundo é amado por alguém."*
  - $\exists x : \forall y : A(x, y)$ significa *"Existe alguém que ama todo mundo."*

$\triangleleft$

A ordem dos quantificadores

- Exemplo 17: Para cada sentença, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

  - $\forall x : \exists y : x < y$ significa

    "Para todo número real x, existe outro real maior que x."

    Esta sentença é <u>verdadeira</u>.

  - $\exists y : \forall x : x < y$ significa

    "Existe um número real y tal que todos os demais números reais são menores que y."

    Esta sentença é <u>falsa</u>.

  As sentenças do exemplo anterior não são equivalentes logicamente.

  <u>Em geral, ao se trocar a ordem de quantificadores de tipo diferente, o sentido da proposição se altera.</u>

$\triangleleft$

Traduzindo de sentenças quantificadas para linguagem natural

- Exemplo 18: Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

  $$C(x) : \quad \text{"} x \text{ tem um computador"}$$

  $$F(x, y) : \quad \text{"} x \text{ e } y \text{ são amigos"}$$

  - $\forall x : (C(x) \lor \exists y : (C(y) \land F(x, y)))$ significa

    "Todo estudante tem um computador, ou tem um amigo que tenha um computador."

  - $\exists x : \forall y : \forall z : ((F(x, y) \land F(x, z) \land (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$ significa

    "Existe um estudante cujos todos amigos não são amigos entre si."

$\triangleleft$

Traduzindo de linguagem natural para sentenças lógicas

- Exemplo 19: Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
  - *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir."*
  - *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba."*
  - *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir."*

Solução.

Primeiro definimos os seguintes predicados sobre o universo de todos os estudantes:

$$D(x): \quad \text{"}x \text{ sabe dirigir"}$$

$$A(x,y): \quad \text{"}x \text{ e } y \text{ são amigos"}$$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- Exemplo 19: (Continuação)

Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal:

1. *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y))$$

2. *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem nenhum amigo que saiba"*:

$$\exists x : (\neg D(x) \land \forall y : (A(x,y) \rightarrow \neg D(y)))$$

3. *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y) \land \forall z : (A(x,z) \land \neg D(z) \rightarrow y = z))$$

◁

Negação de quantificadores aninhados

- A negação de quantificadores aninhados usa as mesmas leis de De Morgan para negação de quantificadores.

Leis de De Morgan para negação
$\neg\forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

Notando que $P(x)$ pode ser ela mesma uma expressão quantificada.

- Exemplo 20: Seja $A(x,y)$ a proposição *"A pessoa x ama a pessoa y"* com universo de discurso como sendo todas as pessoas do mundo.

$P: \quad \forall x : \exists y : A(x,y)$ — *"Todo mundo ama alguém"*

$$\neg P: \quad \neg\forall x : \exists y : A(x,y) \equiv \exists x : \neg\exists y : A(x,y) \equiv \exists x : \forall y : \neg A(x,y)$$

"Existe alguém que não ama ninguém."

◁

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo 21: Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{"}x \text{ sabe dirigir"}$$

$$A(x,y): \quad \text{"}x \text{ e } y \text{ são amigos"}$$

Proposição P:

P : $\forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y))$

Afirmativa: *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir."*

¬P : $\exists x : \forall y : (A(x,y) \rightarrow D(y))$

Negação: *"Existe um estudante cujos amigos todos sabem dirigir."*

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo 21: (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{"}x \text{ sabe dirigir"}$$

$$A(x,y): \quad \text{"}x \text{ e } y \text{ são amigos"}$$

Proposição Q:

$$\mathbf{Q}: \quad \exists x : (\neg D(x) \land \forall y : (A(x,y) \rightarrow \neg D(y)))$$

Afirmativa: *"Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem"* *"nenhum amigo que saiba."*

$$\neg\mathbf{Q}: \quad \forall x : (D(x) \lor \exists y : (A(x,y) \land D(y)))$$

Negação: *"Todo estudante sabe dirigir, ou tem um amigo que sabe."*

Negação de quantificadores aninhados

- Exemplo 21: (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{"}x \text{ sabe dirigir"}$$

$$A(x,y): \quad \text{"}x \text{ e } y \text{ são amigos"}$$

Proposição R:

$$\mathbf{R}: \quad \forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y) \land \forall z : (A(x,z) \land \neg D(z) \rightarrow y = z))$$

Afirmativa: *"Cada estudante tem exatamente um amigo que"* *"não sabe dirigir."*

$$\neg\mathbf{R}: \quad \exists x : \forall y : (A(x,y) \rightarrow (D(y) \lor \exists z : (A(x,z) \land \neg D(z) \land y \neq z)))$$

Negação: *"Existe um estudante que não possui amigos que não dirijam"* *"ou que possui ao menos dois amigos que não dirijam."*

◁

Apêndice: Proposições condicionais universais

Proposição condicional universal

- Uma **proposição condicional universal** tem a forma

$$\forall x : (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Proposições desta forma são muito comuns.

  1. *"Se um número real é maior que 2 então seu quadrado é maior que 4"*:

  $$\forall x \in \mathbb{R} : ((x > 2) \rightarrow (x^2 > 4))$$

  2. *"Todo byte tem oito bits"*:

  $$\forall x : \text{"se } x \text{ é um byte, então } x \text{ tem oito bits"}.$$

- As duas proposições seguintes são equivalentes.

$$\forall x : (x \in D \rightarrow P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in D : P(x)$$

No geral prefere-se a segunda forma.

Negação de proposições condicionais universais

- A negação de uma proposição condicional universal é derivada como:

$$\begin{aligned}\neg\forall x : (P(x) \to Q(x)) &\equiv \exists x : \neg(P(x) \to Q(x)) && \text{(por De Morgan)}\\ &\equiv \exists x : \neg(\neg P(x) \lor Q(x)) && \text{(por equiv. de implicação)}\\ &\equiv \exists x : (P(x) \land \neg Q(x)) && \text{(por De Morgan)}\end{aligned}$$

- Exemplo 22:

  P : *"Toda pessoa loira tem olhos azuis."*

  $\neg P$: *"Existe uma pessoa loira que não tem olhos azuis."*

  $\triangleleft$

- Exemplo 23:

  P : *"Se um programa foi escrito em C, ele tem um erro."*

  $\neg P$: *"Existe pelo menos um programa escrito em C que não tenha erro."*

  $\triangleleft$

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Lembre-se de que se a premisa p é falsa, a implicação

$$p \to q$$

  é sempre verdadeira, independente de q.

- Portanto, se $P(x)$ é falso para cada x no universo de discurso D, então uma proposição da forma

$$\forall x \in D : (P(x) \to Q(x))$$

  é verdadeira, já que a implicação $P(x) \to Q(x)$ é verdadeira para todo x.

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Exemplo 24: Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.

  - **Cenário 1**: três bolas azuis e uma branca são colocadas no prato.

    A afirmação

    "Todas as bolas no prato são azuis"

    é verdadeira ou falsa?

    Para ver que a afirmação é falsa, note que sua negativa é verdadeira:

    "Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul."

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Exemplo 24: (Continuação)

  Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.

  - **Cenário 2**: nenhuma bola é colocada no prato.

    A afirmação

    "Todas as bolas no prato são azuis"

    é verdadeira ou falsa?

    Para ver que a afirmação é verdadeira, note que sua negativa é falsa:

    "Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul."

    Uma outra maneira para ver que a afirmação é verdadeira é escrevê-la explicitamente como uma proposição universal em que a hipótese da implicação é sempre falsa (e, portanto, a implicação é sempre verdadeira):

    "Para toda bola, temos que se ela está no prato, então ela é azul."

    $\triangleleft$