

Conjuntos

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Conjuntos: Introdução

- **Conjuntos** são as estruturas discretas fundamentais sobre as quais todas as demais estruturas discretas podem ser construídas.
- A **Teoria dos Conjuntos** é capaz de representar toda a Matemática.
Conceitos básicos como conjunto, pertinência de elementos a um conjunto, o conjunto vazio, operações sobre conjuntos (união, interseção, complemento, ...) podem capturar conceitos como aritmética, lógica, etc.
- Os conceitos que estudaremos aqui são essenciais para diversas áreas, incluindo algumas que estudaremos neste curso:
 - funções,
 - sequências,
 - somatórios e produtórios,
 - análise combinatória,
 - relações.
 - ...

Conjuntos

Conjuntos

- Um **conjunto** é coleção não-ordenada de objetos bem definidos, denominados **elementos** ou **membros** do conjunto.

Escrevemos

$$a \in A$$

para denotar que o elemento a pertence ao conjunto A .

Escrevemos

$$a \notin A$$

para denotar que o elemento a não pertence ao conjunto A .

- Usamos normalmente letras maiúsculas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

Formas de definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:

① $\{\text{Ana, Bia, Carlos}\}$ ② $\{\text{Júpiter, } 2, \pi, \text{Ana}\}$ ③ $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$

- Especificar uma propriedade que define um conjunto, como em $S = \{x \mid P(x)\}$:

① $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$ ② $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$

- Usar uma definição recursiva:

①
$$\begin{cases} 1 \in A, \\ \text{se } x \in A \text{ e } x + 2 < 10, \text{ então } x + 2 \in A. \end{cases}$$

Formas de definir um conjunto

- Especificar uma função característica:

① $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1, 3, 5, 7, 9, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ ② $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{N} \text{ é primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

- Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição:

- ① Não é possível definir o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ listando todos os seus elementos.

Alguns conjuntos importantes

- Alguns conjuntos importantes são:

- ① $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ é o conjunto dos **números naturais**.
② $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos **números inteiros**.
③ $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ é o conjunto dos **números inteiros positivos**.
④ $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{ e } q \neq 0\}$ é o conjunto dos **números racionais**.
⑤ \mathbb{R} é o conjunto dos **números reais**.
⑥ \mathbb{R}^+ é o conjunto dos **números reais positivos**.
⑦ \mathbb{C} é o conjunto dos **números complexos**.

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos são **iguais** se eles possuem os mesmos elementos.

Formalmente, para todos conjuntos A e B ,

$$A = B \iff \forall x : (x \in A \iff x \in B).$$

- A definição de igualdade de conjuntos implica que:

- A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante:

① $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{c, a, d, b\}$

- Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto:

① $\{a, a, a, a, b, b, b, c, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

Subconjuntos

- Um conjunto A é chamado **subconjunto** de um conjunto B sse cada elemento de A também é um elemento de B .

Usamos $A \subseteq B$ para denotar que A é subconjunto de B .

- Formalmente:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B).$$

- As frases “ A está contido em B ” e “ B contém A ” são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B .

- O conjunto dos naturais é um subconjunto dos inteiros.
- O conjunto de brasileiros é um subconjunto do conjunto de brasileiros. (Nada impede que um conjunto seja um subconjunto de si próprio!)
- O conjunto dos números complexos não é um subconjunto dos números reais.

Subconjuntos próprios

- Um conjunto A é **subconjunto próprio** de um conjunto B sse cada elemento de A está em B e existe pelo menos um elemento de B que não está em A .

- Formalmente:

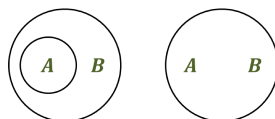
$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x : (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B. \end{aligned}$$

- O conjunto dos naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos inteiros.
- O conjunto dos brasileiros não é um subconjunto próprio dos brasileiros.

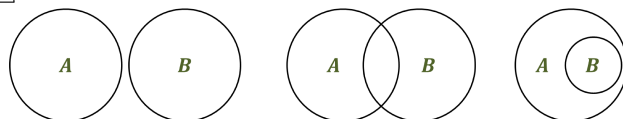
Diagramas de Venn

- Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

- Exemplo 1: $A \subseteq B$.



- Exemplo 2: $A \not\subseteq B$.



- Diagramas de Venn não podem ser usados como demonstração!

O conjunto vazio

- O **conjunto vazio** ou **conjunto nulo** não contém elementos. Denotamos o conjunto vazio por $\{\}$ ou \emptyset .
- Note que $\{\emptyset\}$ não denota o conjunto vazio, mas o conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.
- Teorema:** O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Prova. Seja A um conjunto qualquer. Então

$$\forall x : (x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$$

é verdade por vacuidade, já que a premissa da implicação é sempre falsa.

Logo $\emptyset \subseteq A$. □

Conjunto potência

- Dado um conjunto A , o **conjunto potência de A** é o conjunto de todos os subconjuntos de A .

Denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto potência de A .

- Exemplos:

- 1 Dado o conjunto $S = \{x, y, z\}$, seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

- 2 Dado o conjunto vazio \emptyset , seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Conjunto potência

- **Teorema:** Se um conjunto finito A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Prova. Para formar um subconjunto S qualquer de A , podemos percorrer cada elemento $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$), decidindo se $a_i \in S$ ou se $a_i \notin S$.

Como para cada elemento há duas opções (pertence ou não pertence), e há um total de n elementos em A , há 2^n maneiras de se formar um subconjunto S de A .

Logo, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. □

Tuplas ordenadas

- Uma **n -tupla ordenada** (a_1, a_2, \dots, a_n) é uma coleção ordenada de n elementos, em que a_1 é o primeiro elemento, a_2 é o segundo elemento, \dots , e a_n é o n -ésimo elemento.

- Algumas n -tuplas ordenadas recebem nomes especiais:

- Uma 2-tupla ordenada é chamada de **par ordenado**.
- Uma 3-tupla ordenada é chamada de **tripla ordenada**.
- Uma 4-tupla ordenada é chamada de **quádrupla ordenada**.
- \dots

- Duas n -tuplas ordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) são **iguais** sse

$$x_i = y_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Produto Cartesiano

- Sejam A e B conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B , denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$.

Formalmente:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

- **Exemplo 3:** Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Note, em geral, que $A \times B \neq B \times A$. ◀

Produto Cartesiano

- Produtos cartesianos podem ser generalizados para mais de dois conjuntos.
- Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos.

O **produto cartesiano** de A_1, A_2, \dots, A_n , denotado

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n,$$

é o conjunto de todas n -tuplas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) , onde $a_i \in A_i$ para $i = 1 \dots n$.

Formalmente:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1 \dots n\}$$

- **Exemplo 4:** Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\gamma, \delta\}$.

$$A \times B \times C = \{(0, a, \gamma), (0, a, \delta), (0, b, \gamma), (0, b, \delta), \\ (1, a, \gamma), (1, a, \delta), (1, b, \gamma), (1, b, \delta)\}$$



O tamanho de conjuntos finitos

- Seja A um conjunto finito contendo exatamente n elementos distintos. Dizemos que a **cardinalidade** (ou **tamanho**) de A é n . A notação $|A| = n$ indica que o tamanho de A é n elementos.
- Estudaremos a cardinalidade de conjuntos infinitos mais adiante.

Operações em conjuntos

Operações em conjuntos: Introdução

- Dois ou mais conjuntos podem ser combinados de diferentes maneiras. Por exemplo, dados o conjunto de estudantes de Matemática Discreta e o conjunto de pessoas nascidas em Minas Gerais, podemos definir:
 - 1 o conjunto de mineiros que estudam Matemática Discreta,
 - 2 o conjunto de pessoas que são mineiras ou estudam Matemática Discreta,
 - 3 o conjunto de estudantes de Matemática Discreta que não são mineiros,
 - 4 ...
- Aqui estudaremos **operações em conjuntos** que permitem a criação de conjuntos mais complexos a partir de conjuntos mais simples.

Operações em conjuntos

- Sejam A e B subconjuntos do conjunto universal U :

União:	$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$	
Alternativamente:	$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$	
Notação:	$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$	
Interseção:	$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$	
Alternativamente:	$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$	
Notação:	$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$	
Diferença:	$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	
Alternativamente:	$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$	
Complemento:	$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$	
Alternativamente:	$x \in \bar{A} \leftrightarrow x \notin A$	

Operações em conjuntos

- Exemplo 5:** Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Considere como conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{1, 5\}$
- $A - B = \{3, 4\}$
- $B - A = \{2, 6\}$
- $\bar{A} = \{0, 2, 6, 7\}$
- $\bar{B} = \{0, 3, 4, 7\}$



Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, cada elemento de A está em B , e cada elemento de B está em A .
- Uma maneira conveniente de se mostrar que dois conjuntos são iguais é mostrando que cada conjunto é subconjunto do outro.

Formalmente:

$$A = B \quad \text{sse} \quad \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Teorema: $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Prova. Escrevendo $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ formalmente:

$$\begin{aligned}
 & A = B \\
 \equiv & \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B) && \text{(definição de igualdade)} \\
 \equiv & \forall x : ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) && \text{(definição de } \leftrightarrow \text{)} \\
 \equiv & (\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x : (x \in B \rightarrow x \in A)) && \text{(distributividade de } \forall \text{ sobre } \wedge \text{)} \\
 \equiv & A \subseteq B \wedge B \subseteq A && \text{(definição de } \subseteq \text{)}
 \end{aligned}$$



Igualdade de conjuntos

- Exemplo 6:** Mostre que $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Solução.

- Método 1:** Manipulando a definição dos operadores em conjuntos.

Vamos mostrar que $x \in \overline{(A \cap B)}$ sse $x \in (\bar{A} \cup \bar{B})$:

$$\begin{aligned}
 x \in \overline{(A \cap B)} & \leftrightarrow x \notin (A \cap B) && \text{(definição de complemento)} \\
 & \leftrightarrow \neg(x \in (A \cap B)) && \text{(definição de } \notin \text{)} \\
 & \leftrightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) && \text{(definição de interseção)} \\
 & \leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) && \text{(de Morgan)} \\
 & \leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) && \text{(definição de } \notin \text{)} \\
 & \leftrightarrow (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B}) && \text{(definição de complemento)} \\
 & \leftrightarrow x \in (\bar{A} \cup \bar{B}) && \text{(definição de união)}
 \end{aligned}$$

Igualdade de conjuntos

Exemplo 6: (Continuação)

- Método 2: Usando uma **tabela de pertinência**, em que usamos o símbolo 1 para indicar que um elemento pertence a um conjunto, e o símbolo 0 para indicar que ele não pertence.

A tabela abaixo demonstra que um elemento pertence a $\overline{(A \cap B)}$ (quarta coluna) sse ele pertence a $\overline{A} \cup \overline{B}$ (sexta coluna):

A	B	$A \cap B$	$\overline{(A \cap B)}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1



Igualdade de conjuntos

- Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universal U .

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
União e interseção com U	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo	$\overline{\overline{A}} = A$	
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos	$A - B = A \cap \overline{B}$	
União e interseção com \emptyset	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
União e interseção com o complemento	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Complementos de U e \emptyset	$\overline{U} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = U$

Conjuntos disjuntos

- Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum.

Formalmente:

$$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \iff A \cap B = \emptyset.$$

- Proposição:** Dados dois conjuntos A e B , $(A - B)$ e B são disjuntos.

Prova. Por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, que existem conjuntos A e B tais que $(A - B) \cap B \neq \emptyset$. Neste caso existe um elemento x tal que $x \in (A - B) \wedge x \in B$. Note que, em particular, isso significa que $x \in B$.

Por outro lado, também teremos $x \in (A - B)$, o que, pela definição de diferença, significa que $x \in A \wedge x \notin B$. Em particular, isso implica que $x \notin B$.

Logo chegamos a uma contradição, uma vez que $x \in B$ e $x \notin B$. Portanto, a proposição deve ser verdadeira. \square

Partições de um conjunto

- Os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**, ou **sem sobreposição**) sse $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$.

- Uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é uma **partição** do conjunto A sse

(i) $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, e

(ii) A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente disjuntos.

- Exemplo 7:** $\{\{1, 2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}$ é uma partição de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.



- Exemplo 8:** \mathbb{N} pode ser particionado entre o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares.



O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos “Ingênua”

O Paradoxo do Barbeiro

- Vimos que um conjunto pode ser especificado através de uma propriedade que define um conjunto, como em $S = \{x \mid P(x)\}$:

① $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$

② $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$

- Entretanto, a propriedade $P(x)$ não pode ser uma propriedade qualquer.
- **Paradoxo do Barbeiro:** “O barbeiro é alguém que barbeia todos aqueles, e apenas aqueles, homens que não se barbeiam sozinhos.”

A pergunta é: o barbeiro barbeia a si mesmo?

Equivalentemente, seja b o barbeiro e seja B o conjunto de todas as pessoas que o barbeiro b barbeia. Então:

$$b \in B?$$

Paradoxo: $b \in B \leftrightarrow b \notin B!$

O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos “Ingênua”

- O Paradoxo do Barbeiro é um caso especial do problema identificado por Bertrand Russell:

Paradoxo de Russell: Se definirmos S como “o conjunto de todos os conjuntos que não têm a si mesmo como elemento”, ou seja,

$$S = \{A \mid A \text{ é um conjunto e } A \notin A\},$$

como decidir se $S \in S$?

Paradoxo: $S \in S \leftrightarrow S \notin S!$

- Lições:
 - Teoria de Conjuntos “Ingênua” (“*Naïve set theory*”) não pode ser usada sem cuidado.
 - Para isso existem **abordagens axiomáticas**, como a de Zermelo-Fraenkel (“*ZF Set Theory*”).