

Funções, Sequências, Somatórios e Produtórios

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Funções

Funções, Sequências, Somatórios: Introdução

- Aqui estudaremos alguns conceitos fundamentais de matemática discreta.
- **Funções** são associações de cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.
- **Sequências** são listas ordenadas de elementos.
Sequências de particular importância incluem:
 - ① progressões aritméticas e geométricas,
 - ② strings de caracteres.
- **Somatórios** e **produtórios** são a soma e o produto, respectivamente, dos termos de uma sequência numérica.

Funções: Introdução

- Frequentemente temos que associar cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.
Por exemplo, podemos:
 - ① Associar cada aluno de Matemática Discreta a um conceito A, B, C, D, E ou F.
 - ② Associar cada inteiro ao seu quadrado.
 - ③ Associar cada país ao seu chefe de Estado.
- O conceito de **função** formaliza este tipo de associação.
- Em matemática e ciência da computação, funções são fundamentais:
 - na definição de estruturas discretas como **sequências** e **strings**,
 - no estudo de complexidade de algoritmos,
 - na produção de algoritmos recursivos,
 - ...

Funções

- Sejam A e B conjuntos não-vazios.

Uma **função** f de A para B é uma associação de exatamente um elemento de B a cada elemento de A .

Escrevemos

$$f(a) = b$$

se b for o único elemento de B associado através de f ao elemento a de A .

Funções

- Se f é uma função de A para B , escrevemos

$$f : A \rightarrow B$$

para denotar o **tipo** da função.

O conjunto A é chamado de **domínio** de f .

O conjunto B é chamado de **co-domínio** ou **contra-domínio** de f .

A **imagem** de f é o conjunto de valores que f pode assumir:

$$\text{imagem de } f = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

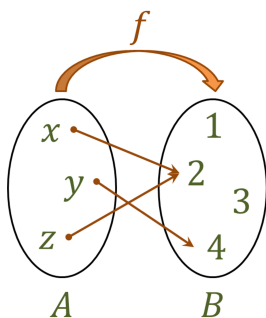
A **imagem inversa** de um elemento $b \in B$ é o conjunto de valores $a \in A$ que são mapeados a b via f :

$$\text{imagem inversa de } b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Funções: Exemplos

- Exemplo 1:** Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Seja a função $f : A \rightarrow B$ definida pelo diagrama abaixo.



- $f(x) = 2$
- $f(y) = 4$
- $f(z) = 2$

- Imagem inversa de 1: \emptyset
- Imagem inversa de 2: $\{x, z\}$
- Imagem inversa de 3: \emptyset
- Imagem inversa de 4: $\{y\}$

- Domínio de f : $\{x, y, z\}$
- Co-domínio de f : $\{1, 2, 3, 4\}$
- Imagem de f : $\{2, 4\}$

- A função f pode ser representada como o **conjunto de pares ordenados**:

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$



Funções: Exemplos

- Exemplo 2:** Outros exemplos de funções:

- Função quadrado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 \quad \text{ou} \quad f : x \mapsto x^2$$

- Função sucessor $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$f(n) = n + 1 \quad \text{ou} \quad f : n \mapsto n + 1$$

- Função constante $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$f(r) = 2 \quad \text{ou} \quad f : r \mapsto 2$$

- Função pai $f : P \rightarrow P$, onde P é o conjunto de todas as pessoas:

$$f : p \mapsto p', \text{ onde } p' \text{ é pai de } p$$



Igualdade de funções

- Duas funções f e g são **iguais** sse elas:
 - têm o mesmo domínio
 - têm o mesmo co-domínio
 - mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do co-domínio.

Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \rightarrow B$:

$$f = g \quad \text{sse} \quad \forall a \in A : f(a) = g(a).$$

- **Exemplo 3:** Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$.

Então $f = g$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$



Função injetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função injetiva** (ou **injetora** ou **um-para-um**) sse para todos $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ou, equivalentemente,

$$f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

- Intuitivamente, uma função é injetiva se cada elemento do domínio é mapeado em um elemento diferente do co-domínio.

- **Exemplo 4:** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

- $f(x) = x + 1$
é injetiva;

- $f(x) = x/10$
é injetiva;

- $f(x) = x^2$
não é injetiva;



Função sobrejetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) sse para todo $b \in B$ é possível achar um $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- Intuitivamente, uma função é sobrejetora se cada elemento do co-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.

- **Exemplo 5:** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

- $f(x) = x + 1$ é sobrejetiva;

- $f(x) = x/10$ é sobrejetiva;

- $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva;



Função bijetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função bijetiva** (ou **bijetora**) sse f é injetiva e sobrejetiva.

- **Exemplo 6:** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

- $f(x) = x + 1$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;

- $f(x) = x/10$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;

- $f(x) = 2^x$ não é bijetiva (é injetiva mas não é sobrejetiva);

- $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ não é bijetiva (é sobrejetiva mas não é injetiva);

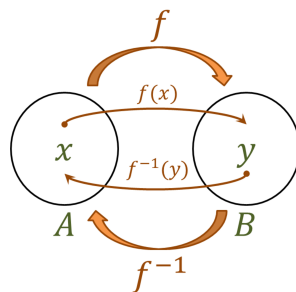


Função inversa

- Seja $f : A \rightarrow B$ uma função bijetiva.

A **função inversa** de f é $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{sse} \quad y = f(x)$$



- Exemplo 7:** A função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x + 1$ é invertível porque ela é bijetiva. Sua inversa é

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

- Exemplo 8:** A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é invertível porque ela não é bijetiva: $f(2) = f(-2) = 4$, logo $f^{-1}(4)$ não é definido.

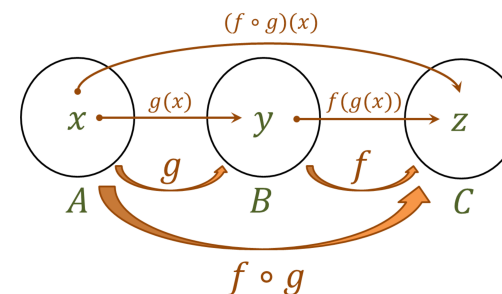
Composição de funções

- Sejam $g : A \rightarrow B'$ e $f : B \rightarrow C$ funções tais que a imagem de g é um subconjunto do domínio de f , i.e., $B' \subseteq B$.

A **função composta** de f com g , denotada por $f \circ g : A \rightarrow C$, é definida para todo $a \in A$ da seguinte forma:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

A função $f \circ g$ é chamada de **composição de f e g** .



Composição de funções

- Exemplo 9:** Sejam $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(n) = n + 1 \quad \text{e} \quad g(n) = n^2.$$

É verdade que $f \circ g = g \circ f$?

Solução. $\forall n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1.$$

porém

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1)^2 = n^2 + n + 1,$$

Logo $f \circ g \neq g \circ f$.

- O exemplo acima mostra que a composição de funções não é comutativa.

Composição com a função identidade

- Dado um domínio A , a **função identidade** $\iota_A : A \rightarrow A$ é definida como:

$$\iota_A(a) = a, \quad \forall a \in A.$$

- Teorema.** Se f é uma função de X para Y , e ι_X é a função identidade em X e ι_Y é a função identidade em Y , então

$$f \circ \iota_X = f$$

$$\iota_Y \circ f = f$$

- Teorema.** Se $f : X \rightarrow Y$ uma função bijetiva com função inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$, então

$$f^{-1} \circ f = \iota_X$$

$$f \circ f^{-1} = \iota_Y$$

Propriedades importantes da composição de funções injetivas e sobrejetivas

- **Teorema.** Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.
- **Teorema.** Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

Funções importantes: Função piso e função teto

- A função **piso** ou **chão** (em inglês, *floor*) de associa cada número real x ao maior número inteiro menor ou igual a ele.
O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$.
- A função **teto** (em inglês, *ceiling*) de associa cada número real x ao menor número inteiro maior ou igual a ele.
O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$.
- Tanto a função piso quanto a função teto têm tipo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.
- Exemplo 10: :

$$\begin{array}{l} \bullet \lfloor \pi \rfloor = 3 \\ \bullet \lceil \pi \rceil = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \bullet \lfloor -2.7 \rfloor = -3 \\ \bullet \lceil -2.7 \rceil = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \bullet \lfloor 42 \rfloor = 42 \\ \bullet \lceil 42 \rceil = 42 \end{array}$$



Funções importantes: Função piso e função teto

- Algumas propriedades úteis das funções piso e teto:

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

- Para provar propriedades sobre funções piso e teto, é útil observar que:

$$x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon \quad , \text{ para algum } 0 \leq \varepsilon < 1,$$

$$x = \lceil x \rceil - \varepsilon \quad , \text{ para algum } 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Funções importantes: Função piso e função teto

- Exemplo 11: Vamos demonstrar a propriedade de que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

Prova. Vamos representar o número x como $n + \varepsilon$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \varepsilon < 1$.

Há dois casos a se considerar, dependendo se $\varepsilon = 0$ ou não.

Caso 1: $\varepsilon = 0$. Neste caso $x = n$ e $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -n$.

Caso 2: $0 < \varepsilon < 1$. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \lfloor -x \rfloor &= \lfloor -(n + \varepsilon) \rfloor && \text{(pois } x = n + \varepsilon) \\ &= \lfloor -n - \varepsilon \rfloor \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função piso),} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} -\lceil x \rceil &= -\lceil n + \varepsilon \rceil && \text{(pois } x = n + \varepsilon) \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função teto),} \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$. □

Funções parciais

- Uma **função parcial** f de um conjunto A para um conjunto B é uma associação a cada elemento a em um subconjunto de A , chamado de **domínio de definição de f** , a um único elemento b de B .

Os conjuntos A e B são chamados de **domínio** e **co-domínio** de f , respectivamente.

Dizemos que f é **indefinida** para elementos de A que não estão no domínio de definição de f .

Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A , dizemos que f é uma **função total**.

- **Exemplo 12:** A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(n) = \sqrt{n}$ é uma função parcial de \mathbb{Z} para \mathbb{R} em que o domínio da definição é o conjunto dos inteiros não-negativos.

A função f é indefinida para os inteiros negativos.



Sequências

Sequências: Introdução

- **Sequências** são listas ordenadas de elementos.
- Sequências são estruturas discretas que aparecem com frequência em ciência da computação:
 - 1 progressão aritmética,
 - 2 progressão geométrica,
 - 3 strings,
 - 4 ...
- Nesta seção vamos estudar como definir sequências, e como encontrar regras para geração de sequências.

Sequências

- Uma sequência é uma estrutura utilizada para representar uma lista ordenada. Formalmente, uma **sequência** é uma função definida do conjunto dos naturais (a partir de um valor específico, normalmente 0 ou 1) para um conjunto arbitrário S .
- Usamos a_n para denotar a imagem do inteiro n . Cada a_n é chamado de um **termo** da sequência. A sequência como um todo é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.
- Exemplos:
 - 1 A sequência dos n primeiros naturais: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$
 - 2 A sequência dos números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$
 - 3 A sequência de $1/n$, para n natural: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots$

Sequências

- Dois tipos de sequências importantes são as progressões aritméticas e geométricas.

- Uma **progressão aritmética** é uma sequência da forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + nd, \dots$$

onde o **termo inicial** a e a **diferença comum** d são números reais.

- Uma **progressão geométrica** é uma sequência da forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n, \dots$$

onde o **termo inicial** a e a **razão** r são números reais.

Fórmulas explícitas para sequências

- Uma **fórmula explícita** define como obter o k -ésimo termo de uma sequência diretamente em função de k .

Uma mesma sequência pode ser definida por mais de uma fórmula explícita.

- Exemplo 13:** A sequência

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots$$

pode ser definida como uma função dos naturais para os reais:

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 2 \mapsto \frac{1}{3} \quad 3 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \dots$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Fórmulas explícitas para sequências

- Exemplo 13:** (Continuação)

A mesma sequência pode ser definida como uma função dos inteiros positivos para os reais:

$$1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 3 \mapsto \frac{1}{3} \quad 4 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \dots$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$



Igualdade de sequências

- Duas sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ são **iguais** sse para todo n :

$$a_n = b_n$$

- Exemplo 14:** Sejam as sequências (a_1, a_2, a_3, \dots) e (b_2, b_3, b_4, \dots) definidas pelas fórmulas explícitas abaixo.

$$a_i = i/(i+1) \quad \text{para inteiros } i \geq 1,$$

$$b_j = (j-1)/j \quad \text{para inteiros } j \geq 2.$$

As sequências são idênticas, como podemos observar:

$$a_1 = 1/(1+1) = 1/2 \quad b_2 = (2-1)/2 = 1/2$$

$$a_2 = 2/(2+1) = 2/3 \quad b_3 = (3-1)/3 = 2/3$$

$$a_3 = 3/(3+1) = 3/4 \quad b_4 = (4-1)/4 = 3/4$$

...

...



Definindo uma sequência a partir de seus termos

- Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para gerar a sequência como um todo.
- Maneiras típicas de se definir uma sequência são:
 - Prover uma fórmula explícita para cada termo da sequência.
 - Prover um algoritmo que gere a sequência.
 - Prover uma fórmula recursiva para cada termo da sequência.
- É importante notar que, dado um número limitado de termos

$$a_1, a_2, \dots, a_i$$

de uma sequência, podemos achar uma regra que gere estes termos, mas esta regra é garantida apenas para os termos a_1, a_2, \dots, a_i apresentados.

Nada garante que a fórmula ou algoritmo valha para a_{i+1} , ou para a sequência como um todo!

Definindo uma sequência a partir de seus termos

- **Exemplo 15:** Seja a sequência cujos 5 primeiros termos são 1, 2, 3, 4, 5.

A fórmula

$$a_n = n, \quad \text{para } n \geq 1$$

gera estes 5 termos corretamente, e prevê que

$$a_6 = 6.$$

O algoritmo

“Gere todos os naturais cujo resto da divisão por 10 está entre 1 e 5”

também gera estes mesmos cinco termos, e prevê que

$$a_6 = 11.$$

As duas descrições concordam para todos os termos dados, mas geram sequências diferentes. Apenas com as informações dadas não há como dizer qual sequência é mais apropriada.

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- **Exemplo 16:** Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.$$

Solução.

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = 3^n - 2, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$



Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- **Exemplo 17:** Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10.$$

Solução.

Esta é uma **sequência alternante**, ou seja, cada termo a_n possui sinal oposto ao do termo a_{n-1} .

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = (-1)^{n+1}n, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$



Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- Exemplo 18: Como produzir os termos de uma sequência cujos 10 primeiros termos são:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

“Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes na sequência.”



Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- Exemplo 19: Como produzir os termos de uma sequência cujos 16 primeiros termos são:

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0?

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

“Para cada natural $n \geq 1$, em ordem crescente, adicione à sequência n termos 0, seguidos de n termos 1.”

Desafio: Você consegue encontrar uma fórmula explícita para esta mesma sequência?



Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

- Uma **relação de recorrência** para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em termos de um ou mais termos prévios na sequência (i.e., a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) para cada $n \geq n_0$, onde n_0 é um inteiro não-negativo.

- Exemplo 20: A sequência

1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, ...

pode ser definida pela fórmula explícita

$$a_n = n!, \quad n \geq 0,$$

ou pela fórmula recursiva
$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$



- Por enquanto vamos nos focar em fórmulas explícitas e algoritmos. Fórmulas recursivas serão estudadas em profundidade mais adiante neste curso.

Somatórios e Produtórios

Somatórios

- Muitas vezes estamos interessados na soma ou no produto de todos os termos de uma sequência.
- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **somatório** dos termos

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$$

de $\{a_k\}$ é a soma

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n.$$

Para representação do somatório, usamos o **símbolo de somatório** Σ :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n.$$

Somatórios

- **Exemplo 21:** Seja a sequência $\{a_k\}$ em que $a_k = k^2$.

$$\sum_{k=3}^6 a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

- Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s),$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S .

- **Exemplo 22:**

$$\sum_{s \in \{0,3,7\}} s^2 = 0^2 + 3^2 + 7^2 = 0 + 9 + 49 = 58.$$

Variáveis ligadas e livres em um somatório

- A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos.

As demais variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

- **Exemplo 23:** Em

$$\sum_{i=1}^n (i-1)$$

i é a variável ligada; n é uma variável livre.

- **Exemplo 24:** Em

$$\sum_{k=m}^n k^2$$

k é a variável ligada; m e n são variáveis livres.

Mudança de variável em um somatório

- A variável ligada não é relevante:
trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

- **Exemplo 25:**

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i+1)}{i} = \sum_{j=1}^n \frac{(j+1)}{j} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{(\alpha+1)}{\alpha}$$

- Variáveis livres são relevantes:
trocar uma variável livre pode alterar o valor do somatório.

- **Exemplo 26:** Os somatórios abaixo são distintos, pois se $m \neq n$, eles darão valores diferentes.

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i+1)}{i} \neq \sum_{i=1}^m \frac{(i+1)}{i}$$

Mudança de variável em um somatório

- Dois somatórios são **idênticos** sse eles possuem termos idênticos.

- Exemplo 27:**

$$\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 = \sum_{k=1}^3 k^2,$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 &= (2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$



Mudança de variável em um somatório

- Exemplo 28:** Substitua $k + 1$ na soma abaixo por j :

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k+1}$$

Passos:

1. Calcule os novos limites do somatório: $\begin{cases} \text{Para } k = 0, & j = 0 + 1 = 1 \\ \text{Para } k = 6, & j = 6 + 1 = 7 \end{cases}$

2. Calcule o termo geral:

Como $j = k + 1$, então $k = j - 1$. Logo,

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(j-1)+1} = \frac{1}{j}$$

A soma pode ser reescrita como

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^7 \frac{1}{j}.$$



Produtórios

- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **produtório** dos termos

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$$

de $\{a_k\}$ é o produto

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Para representação do produtório, usamos o **símbolo de produtório** \prod :

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n.$$

- Exemplo 29:** $\prod_{i=1}^3 i^i = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 1 \cdot 4 \cdot 27 = 108$



- As definições de **variável ligada** e **variáveis livres** para somatórios também se aplicam a produtórios.

Propriedades de somatórios e produtórios

- Dadas duas sequências de números reais

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots,$$

$$b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \dots,$$

e seja c é um número real qualquer.

Então as seguintes equações são válidas para qualquer $n \geq m$:

1. $\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$
2. $c \cdot \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n c \cdot a_k$
3. $(\prod_{k=m}^n a_k) \cdot (\prod_{k=m}^n b_k) = \prod_{k=m}^n (a_k \cdot b_k)$