

# Cardinalidade de Conjuntos e Enumerabilidade

Mário S. Alvim  
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG  
(2016/02)

# Enumerabilidade: Introdução

- Quando estudamos conjuntos vimos que o **tamanho** de um conjunto finito é dado pelo número de seus elementos.  
Podemos comparar o tamanho de conjuntos finitos verificando qual conjunto tem mais elementos.
- Entretanto, quando lidamos com conjuntos infinitos, os conceitos de “tamanho” e de “comparação” são mais complexos.
- Aqui estudaremos a **cardinalidade** (i.e., “tamanho”) de conjuntos infinitos, e maneiras de comparar se conjuntos infinitos são “maiores”, “menores”, ou “de igual tamanho” a outros conjuntos infinitos.
- Em particular, definiremos o conceito de **conjunto infinito enumerável**, que é a base da Matemática Discreta.  
Estes conjuntos estão em contraste com os conjuntos **não-enumeráveis**, que são objetos de estudo da matemática contínua.

# Cardinalidade de conjuntos infinitos: Introdução

- A cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos deste conjunto.

Por exemplo:

- 1 O conjunto finito  $A = \{a, b, c\}$  tem cardinalidade  $|A| = 3$ .

- Podemos dividir os conjuntos finitos em classes de acordo com sua cardinalidade:

- a classe de conjuntos com 0 elementos,
- a classe de conjuntos com 1 elementos,
- a classe de conjuntos com 2 elementos,
- ...
- a classe de conjuntos com  $k$  elementos,
- ...

# Cardinalidade de conjuntos infinitos: Introdução

- Mas e quanto a conjuntos infinitos como  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{R}$ ?

Poderíamos dizer que estes conjuntos pertencem à

“classe de conjuntos com  $\infty$  elementos”?

Mais precisamente:

- Será que esta classe existe?
- Será que esta classe é única?
- Temos que ter cuidado com as perguntas acima: o conceito de “infinito” pode ser bastante contraintuitivo!

## Infinito bizarro: O Hotel de Hilbert

- **Exemplo 1:** Imagine um hotel com infinitos quartos acomodando infinitos hóspedes, de modo que cada quarto esteja ocupado por um único hóspede.

Suponha que um novo hóspede chegue ao hotel procurando por um quarto.

É possível acomodar este novo hóspede em algum quarto, sem expulsar nenhum hóspede que já estava no hotel?

### Solução.

- Se o hotel tivesse um número finito de quartos, a resposta seria negativa... Mas o Hotel de Hilbert tem infinitos quartos... E o infinito é bizarro!
- Podemos acomodar o novo hóspede se fizermos cada hóspede em um quarto  $n$  mudar-se para o quarto  $n + 1$ :
  - o hóspede do quarto 1 muda-se para o quarto 2,
  - o hóspede do quarto 2 muda-se para o quarto 3,
  - o hóspede do quarto 3 muda-se para o quarto 4,
  - etc...

Assim podemos acomodar o novo hóspede no quarto 1!



## Infinito bizarro: O Hotel de Hilbert

- **Exemplo 2:** Imagine ainda o mesmo hotel com infinitos quartos acomodando infinitos hóspedes, estando um hóspede em cada quarto.

Suponha que é alta-estação, e um ônibus trazendo um número infinito de hóspedes chega ao hotel, todos procurando por um quarto.

É possível acomodar todos os infinitos hóspedes em algum quarto, sem expulsar nenhum hóspede que já estava no hotel?

### Solução.

- Sim! Podemos acomodar os infinitos hóspedes assim se fizermos cada hóspede em um quarto  $n$  mudar-se para o quarto  $2n$ :
  - o hóspede do quarto 1 muda-se para o quarto 2,
  - o hóspede do quarto 2 muda-se para o quarto 4,
  - o hóspede do quarto 3 muda-se para o quarto 6,
  - etc...

Assim todos os quartos ímpares ficam vagos, e podemos acomodar os infinitos novos hóspedes nos quartos ímpares!



## Infinito bizarro: O Hotel de Hilbert

- **Exemplo 3:** Imagine ainda o mesmo hotel com infinitos quartos acomodando infinitos hóspedes, estando um hóspede em cada quarto.

Agora imagine que cheguem ao hotel um número infinito de ônibus, cada ônibus com um número infinito de hóspedes procurando por um quarto.

É possível acomodar todos os novos hóspedes no hotel, sem expulsar nenhum hóspede que já estava no hotel?

### Solução.

Desafio para o aluno!

(Dica: é possível!)



## Cardinalidade de conjuntos

- O conceito de cardinalidade estende o conceito de “tamanho” para conjuntos infinitos.

A cardinalidade é uma medida de tamanho relativo de um conjunto em comparação com outro conjunto.

Formalmente, sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer.  $A$  tem a mesma **cardinalidade** de  $B$  sse existe uma correspondência um-para-um (ou seja, uma função bijetiva) de  $A$  para  $B$ .

- Note que a definição acima captura a noção de *número de elementos* para conjuntos finitos.
- Além disso, a definição acima também é válida para conjuntos infinitos.

## Conjuntos enumeráveis

- Um conjunto é chamado **enumerável** ou **contável** se ele é finito ou se ele possui a mesma cardinalidade que o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$ .

Caso contrário o conjunto é chamado **não-enumerável** ou **não-contável**.

- Exemplo 4:** O conjunto  $P$  dos números pares positivos é enumerável?

### Solução.

Considere a bijeção entre os dois conjuntos:

$$\begin{array}{cccccc}
 P: & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
 \mathbb{Z}^+: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots
 \end{array}$$

Esta bijeção é uma maneira de **enumerar** ou **contar** os elementos de  $P$ :

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

Podemos mostrar a bijeção de  $\mathbb{Z}^+$  para  $P$ , ou inversamente a bijeção de  $P$  para  $\mathbb{Z}^+$ .



## Conjuntos enumeráveis

- Exemplo 5:** O conjunto  $\mathbb{Z}$  de todos os números inteiros é enumerável?

### Solução.

Considere a bijeção entre os dois conjuntos:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \mathbb{Z}: & \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\
 & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
 \mathbb{Z}^+: & \dots & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & \dots
 \end{array}$$

Logo  $\mathbb{Z}$  é enumerável, e podemos enumerar seus elementos assim:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$



## Conjuntos enumeráveis

- Exemplo 6:** O conjunto  $\mathbb{Q}^+$  dos racionais positivos é enumerável?

**Solução.** Vamos representar o conjunto  $\mathbb{Q}^+$  como uma tabela em que cada linha representa um possível numerador (um inteiro positivo) e cada coluna representa um possível denominador (também um inteiro positivo). A tabela abaixo mostra uma bijeção entre  $\mathbb{Q}^+$  (frações) e  $\mathbb{Z}^+$  (números circulos). (As frações não-simplificadas são redundantes e não entram na bijeção.)

Num./Den.	1	2	3	4	5	...
1	1/1 (1)	1/2 (2)	1/3 (4)	1/4 (6)	1/5 (11)	...
2	2/1 (3)	2/2 (x)	2/3 (7)	2/4 (x)	2/5 ...	...
3	3/1 (5)	3/2 (8)	3/3 (x)	3/4 ...	3/5 ...	...
4	4/1 (9)	4/2 (x)	4/3 ...	4/4 ...	4/5 ...	...
5	5/1 (12)	5/2 ...	5/3 ...	5/4 ...	5/5 ...	...
...	...	...	...	...	...	...

Logo  $\mathbb{Q}^+$  é enumerável.



## Conjuntos enumeráveis

- Exemplo 7:** O conjunto  $\mathbb{Q}$  de todos os racionais é enumerável?

### Solução.

**Método 1:** Adaptando a técnica do exemplo anterior, fazemos linhas e colunas corresponderem todos os inteiros positivos e negativos. A tabela abaixo mostra uma bijeção entre  $\mathbb{Q}$  (frações) e  $\mathbb{Z}^+$  (números circulos). (As frações não-simplificadas são redundantes e não entram na bijeção.)

Num./Den.	1	2	3	4	5	...
0	0/1 (1)	0/2 (x)	0/3 (x)	0/4 (x)	0/5 (x)	...
1	1/1 (2)	1/2 (3)	1/3 (5)	1/4 (8)	1/5 ...	...
-1	-1/1 (4)	-1/2 (6)	-1/3 (9)	-1/4 ...	-1/5 ...	...
2	2/1 (7)	2/2 (x)	2/3 ...	2/4 ...	2/5 ...	...
-2	-2/1 (10)	-2/2 ...	-2/3 ...	-2/4 ...	-2/5 ...	...
...	...	...	...	...	...	...

Logo  $\mathbb{Q}$  é enumerável.

## Conjuntos enumeráveis

- Exemplo 7: (Continuação)

**Método 2:** Considere a seguinte enumeração dos racionais no intervalo  $[0, 1]$  (em que as frações aparecem em ordem crescente de denominador, depois de numerador, tomando o cuidado de eliminar frações repetidas):

$$0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots$$

Para incluir os racionais maiores que 1, podemos estender a lista acima, listando cada fração inversa após a fração original:

$$0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{3}, \dots$$

Por fim, para obter uma enumeração completa dos racionais  $\mathbb{Q}$ , podemos estender a lista acima ao enumerar após cada fração, sua oposta:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \dots$$

Como obtivemos uma enumeração de  $\mathbb{Q}$ , este conjunto é enumerável. ◀

## O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável

- Para verificar que o conjunto  $\mathbb{R}$  de todos os números reais não é enumerável, vamos usar o resultado auxiliar abaixo.

- Teorema:** O conjunto de todos os números reais no intervalo  $[0, 1)$  é não-enumerável.

**Prova.** Por contradição. Suponha que  $[0, 1)$  seja enumerável. Então, por definição de enumerabilidade, existe uma lista  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots$  em que constam todos os elementos de  $[0, 1)$ .

Esta lista pode ser representada por uma matriz, em que cada linha representa um número real em  $[0, 1)$ , ordenada de acordo com a enumeração acima, e cada coluna representa os dígitos decimais deste número.

Mais precisamente, já que cada  $r_i$  nesta lista pertence ao intervalo  $[0, 1)$ , podemos escrever

$$r_i = 0.r_{i1}r_{i2}r_{i3} \dots r_{in} \dots,$$

onde  $r_{in}$  é o  $n$ -ésimo dígito decimal do número  $r_i$ .

## Propriedades dos conjuntos enumeráveis

- Teorema:** A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

**Prova.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos enumeráveis. Portanto existe uma enumeração  $a_1, a_2, a_3, \dots$  para  $A$  e uma enumeração  $b_1, b_2, b_3, \dots$  para  $B$ .

Podemos construir uma enumeração para  $A \cup B$  tomando  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$  (com o cuidado de não listar elementos repetidos, i.e., elementos que estejam em  $A \cap B$ ). ◻

- Teorema:** Qualquer subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

**Prova.** Seja  $B$  um conjunto enumerável, e tome  $A \subseteq B$ . Por hipótese, existe uma enumeração  $b_1, b_2, b_3, \dots$  para  $B$ . Eliminando os termos  $b_i \notin A$  desta enumeração, obtém-se uma enumeração para  $A$ . ◻

- Corolário:** Se um conjunto  $B$  tem um subconjunto  $A \subseteq B$  tal que  $A$  é não-enumerável, então  $B$  é não-enumerável.

**Prova.** Este resultado é apenas o contrapositivo do teorema que diz que qualquer subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. ◻

## O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável

- Prova (Continuação).**

Esta tabela tem o formato abaixo:

Enumeração	1º dec.	2º dec.	3º dec.	...	$n$ -ésimo dec.	...
$r_1$	$r_{11}$	$r_{12}$	$r_{13}$	...	$r_{1n}$	...
$r_2$	$r_{21}$	$r_{22}$	$r_{23}$	...	$r_{2n}$	...
$r_3$	$r_{31}$	$r_{32}$	$r_{33}$	...	$r_{3n}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$r_i$	$r_{i1}$	$r_{i2}$	$r_{i3}$	...	$r_{in}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Se encontrarmos um número  $r_\alpha$  no intervalo  $[0, 1)$  que não esteja listado na tabela acima, chegamos a uma contradição (pois assumimos por hipótese que a lista está completa).

Vamos construir  $r_\alpha$  definindo cada uma de suas casas decimais da seguinte forma:

$$r_{\alpha k} = (r_{kk} + 1) \bmod 10.$$

## O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável

- **Prova (Continuação).**

Assim o número  $\alpha$  é tal que:

Enumeração	1º dec.	2º dec.	3º dec.	...	$k$ -ésimo dec.	...
$r_1$	$r_{11}$	$r_{12}$	$r_{13}$	...	$r_{1k}$	...
$r_2$	$r_{21}$	$r_{22}$	$r_{23}$	...	$r_{2k}$	...
$r_3$	$r_{31}$	$r_{32}$	$r_{33}$	...	$r_{3k}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$r_k$	$r_{k1}$	$r_{k2}$	$r_{k3}$	...	$r_{kk}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$r_\alpha$	$(r_{11} + 1) \pmod{10}$	$(r_{22} + 1) \pmod{10}$	$(r_{33} + 1) \pmod{10}$	...	$(r_{kk} + 1) \pmod{10}$	...

Mas note que o número  $r_\alpha$  não pode estar na lista, pois ele é diferente de todos os demais números da lista (para qualquer  $r_i$  na lista, o  $i$ -ésimo dígito de  $r_\alpha$  é diferente do  $i$ -ésimo dígito de  $r_i$ , logo temos que  $r_\alpha \neq r_i$ ).

Logo, a lista não pode estar completa, pois  $r_\alpha$  não se encontra nela, e chegamos a uma contradição.  $\square$

## O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável

- **Corolário:** O conjunto  $\mathbb{R}$  não é enumerável.

**Prova.** Nesta aula provamos se  $A \subseteq B$  e  $A$  não é enumerável, então  $B$  não é enumerável.

Portanto, observando que  $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ , e sabendo que  $[0, 1)$  não é enumerável, segue-se que  $\mathbb{R}$  não é enumerável.  $\square$

## Uma consequência computacional da não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$

- Podemos utilizar os resultados desta aula para derivar um dos mais importantes resultados na área de Ciência da Computação.

Este resultado é relativo à **computabilidade** de funções.

- Uma **função é computável** quando existe um programa escrito em alguma linguagem de programação que computa os valores desta função.

Uma **função é não-computável** se ela não é computável.

- Usando o que vimos nesta aula, vamos mostrar que existem funções não computáveis.

A ideia é mostrar que o conjunto de todas as funções é maior que o conjunto de todos os programas de computador, de onde somos obrigados a concluir que há funções para as quais não existem programas de computador.

## Uma consequência computacional da não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$

- **Proposição 1.** O conjunto de todos os programas que podem ser escritos em uma linguagem de programação é enumerável.

**Prova.**

De acordo com o que vimos nesta aula, as seguintes afirmações são válidas:

- a) O conjunto de todas as strings que podem ser escritas usando o teclado do computador é enumerável: podemos listar todas strings em ordem alfabética, da menor para a maior, produzindo assim uma enumeração.
- b) O conjunto de todos os programas que podem ser escritos em uma linguagem de programação (C, Java, Python, etc...) é um subconjunto do conjunto de todas as strings que podem ser escritas usando o teclado do computador.
- c) Qualquer subconjunto de um conjunto enumerável é também enumerável.

Juntando as observações (a), (b) e (c) acima, obtemos o resultado proposto.  $\square$

## Uma consequência computacional da não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$

- **Proposição 2.** O conjunto de todas as funções tendo como domínio os naturais e co-domínio o conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  não é enumerável.

**Prova.** Considere nossa prova de que o conjunto dos reais no intervalo  $[0, 1)$  não é enumerável. Cada linha  $r_i$  da tabela pode ser vista como uma função dos naturais para  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Mais precisamente, cada  $r_i$  pode ser visto como a função que associa o dígito  $r_{i1}$  ao natural 1, o dígito  $r_{i2}$  ao natural 2, etc... Como há incontáveis  $r_i$ , há incontáveis funções.  $\square$

- Das Proposições 1 e 2 acima, podemos concluir que **existem mais funções do que programas de computador**, ou seja, **existem funções que não são computáveis**.

Conclusão:

**Existem problemas computacionais para os quais não há algoritmos!**