Indução e Recursão

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Princípio da indução matemática: Introdução

- Muitas proposições matemáticas envolvem quantificações sobre todos os números naturais.
- Por exemplo, as seguintes afirmações são válidas para todos os inteiros positivos n:
  1. $n! \leq n^n$;
  2. $(n^3 - n)$ é divisível por 3;
  3. qualquer conjunto de n elementos tem 2^n subconjuntos distintos.
- Mas se $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito, como provar que as afirmações acima valem para todos os elementos do conjunto?
- A técnica de **indução matemática** pode ser utilizada para provar afirmativas deste tipo.
  - Ou, mais em geral, para provar afirmações sobre todos os elementos de um **conjunto bem ordenado**.

Princípio da indução matemática (fraca)

Princípio da indução matemática: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus, e você se pergunta: *"Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?"*
- Você sabe que
  1. você consegue alcançar o primeiro degrau, e
  2. se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar o próximo degrau.
- Usando as regras acima, você pode deduzir que:
  1. você consegue alcançar o primeiro degrau: pela regra 1;
  2. você consegue alcançar o segundo degrau: pela regra 1, depois regra 2;
  3. você consegue alcançar o terceiro degrau: regra 1, depois regra 2 por duas vezes;
  4. ...
  5. você consegue alcançar o n-ésimo degrau: regra 1, depois regra 2 por $n-1$ vezes.
- Logo, você pode concluir que pode alcançar todos os degraus da escada!

Princípio da indução matemática (fraca)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n, uma **prova** que utilize o **princípio da indução matemática (fraca)** possui duas partes:

  Prova por indução fraca:

  Passo base: Prova-se $P(1)$.

  Passo indutivo: Prova-se que, para qualquer inteiro positivo k, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

- A premissa do passo indutivo ($P(k)$ é verdadeiro) é chamada de **hipótese de indução** ou **I.H.**
- O princípio da indução matemática pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$[\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall k : (P(k) \rightarrow P(k+1))]}_{\text{Passo indutivo}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\forall n : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$ Se n é um inteiro positivo, então $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$.

  Prova. Seja $P(n)$ a proposição *"a soma dos n primeiros inteiros positivos é $n(n+1)/2$"*.

  Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

  Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k. Ou seja, a nossa hipótese de indução é de que, para um inteiro positivo k arbitrário:

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$ (Continuação)

  Sob a hipótese de indução, deve-se mostrar que $P(k+1)$ é válido, ou seja:

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

  Podemos, então, derivar

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(pela I.H.)} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

  de onde concluímos o passo indutivo.

  Como concluímos com sucesso tanto o passo base quanto o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ para todo inteiro positivo n. □

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$ A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2.

  Prova. Seja $P(n)$ a proposição *"A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2"*.

  Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque o primeiro inteiro positivo ímpar é 1, o que é igual a 1^2.

  Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k.

  Note que o k-ésimo inteiro positivo ímpar é dado por $2k-1$.

  Logo, a hipótese de indução é:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2.$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$ (Continuação)

Queremos mostrar que $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \rightarrow P(k+1))$, onde $P(k+1)$ é:

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2.$$

Logo, podemos derivar

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1) &= k^2 + (2(k+1)-1) \quad \text{(pela I.H.)} \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que a soma dos n primeiros ímpares positivos é n^2. □

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$ Para todo inteiro não-negativo n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Prova. Seja $P(n)$ a proposição "$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$".

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque:

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^{0+1} - 1,$$

já que o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito como

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1,$$

e o lado direito pode ser escrito como

$$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$ (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k, ou seja, assuma como verdadeira a hipótese de indução

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Queremos mostrar que, se a hipótese acima for verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$ (Continuação)

Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= \left(\sum_{i=0}^{k} 2^i\right) + 2^{k+1} \\ &= \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1} \quad \text{(pela I.H.)} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ para todo inteiro $n \geq 0$. □

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 4: Para todo inteiro $n \geq 4$, $2^n < n!$.

Prova. Seja $P(n)$ a proposição "$2^n < n!$".

Passo base: $P(4)$ é verdadeiro porque $2^4 = 16$ é menor que $4! = 24$.

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 4$, ou seja, a hipótese de indução é que, para um inteiro arbitrário $k \geq 4$,

$$2^k < k!.$$

Sob esta hipótese, queremos mostrar $P(k+1)$, ou seja,

$$2^{k+1} < (k+1)!$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 4: (Continuação)

Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2(2^k) \\ &< 2(k!) && \text{(pela I.H.)} \\ &< (k+1)k! && \text{(já que } k \geq 4) \\ &= (k+1)!, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4 : P(n)$, ou seja, que $2^n < n!$ para todo inteiro $n \geq 4$. □

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 5: Para todo inteiro $n \geq 0$, $n^3 - n$ é divisível por 3.

Prova. Seja $P(n)$ a proposição "*$n^3 - n$ é divisível por 3*".

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque $0^3 - 0 = 0$ é divisível por 3.

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k, ou seja, que é verdadeira a hipótese de indução de que $k^3 - k$ é divisível por 3.

Queremos mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3.

Para isto, podemos fazer:

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k). \end{aligned}$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 5: (Continuação)

Então sabemos que

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 - k) + 3(k^2 + k).$$

Note que no lado direito da igualdade acima, a primeira parcela da soma é $(k^3 - k)$ e, pela I.H., este valor é divisível por 3.

Além disso, a segunda parcela $3(k^2 + k)$ da soma do lado direito também é divisível por 3.

Logo todo o lado direito da igualdade é divisível por 3, e assim concluímos indutivo ao mostrar que $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3.

Assim mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo inteiro $n \geq 0$. □

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 6:}}$ Para todo inteiro não-negativo n, se um conjunto possui n elementos, então este conjunto possui 2^n subconjuntos.

Prova. Seja $P(n)$ a proposição *"todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos"*.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque o único conjunto de 0 elementos é o conjunto vazio $\emptyset$, que possui somente $2^0 = 1$ subconjunto (ele mesmo).

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k, ou seja, a hipótese de indução é:

"Todo conjunto de k elementos possui 2^k subconjuntos."

Sob a I.H., queremos provar $P(k+1)$, ou seja, que

"Todo conjunto de $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos."

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 6:}}$ (Continuação)

Para mostrar isto, seja T um conjunto qualquer de $k+1$ elementos. Então é possível escrever T como $S \cup \{a\}$, onde

- a é um elemento qualquer de T;
- $S = T - \{a\}$ e, portanto, $|S| = k$.

Note que os subconjuntos de T podem ser obtidos da seguinte forma.

Para cada subconjunto X de S, existem exatamente dois suconjuntos de T: o subconjunto X (em que a não aparece) e o subconjunto $X \cup \{a\}$ (em que a aparece). Logo o número de subconjuntos de T é o dobro do número de subconjuntos de S. Pela hipótese indutiva, S tem 2^k subconjuntos, logo T possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos. Isto conclui o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos. □

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 7:}}$ Uma das Leis de De Morgan afirma que, para dois conjuntos A_1 e A_2, temos

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Sabendo disto, prove a seguinte generalização da Lei de De Morgan: para todo $n \geq 2$,

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}.$$

Prova. Seja $P(n)$ a proposição "$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$".

Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque a Lei de De Morgan original garante que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- $\boxed{\text{Exemplo 7:}}$ (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 2$, ou seja, a hipótese de indução é

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}.$$

Queremos mostrar que, sob a I.H., $P(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}.$$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 7: (Continuação)

Para isto, note que

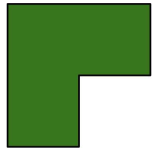
$$\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}} \\
&= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} && \text{(usando a Lei de De Morgan sobre os conjuntos } \textstyle\bigcap_{j=1}^{k} A_j \text{ e } A_{k+1}\text{)} \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} && \text{(pela I.H.)} \\
&= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j},
\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que a generalização da Lei de De Morgan é válida. □

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 8: Seja o inteiro $n \geq 1$. Prove que qualquer região quadrada de tamanho $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L, formada por 3 quadradinhos, do tipo mostrado abaixo.

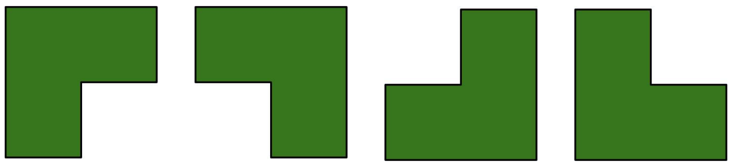


Prova. Seja $P(n)$ a proposição *"qualquer região quadrada de tamanho $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L"*.

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 8: (Continuação)

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque qualquer tabuleiro de tamanho $2^1 \times 2^1$ com um quadrado removido pode ser preenchido com uma peça em formato de L, conforme mostrado abaixo:



Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 8: (Continuação)

Passo indutivo: Assuma como hipótese indutiva que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k, ou seja, que qualquer região quadrada de tamanho $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L.

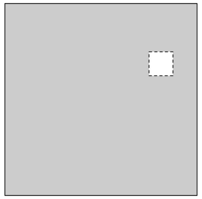
Sob a I.H., queremos mostrar que $P(k+1)$ também deve ser verdadeiro, ou seja, que qualquer região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L.

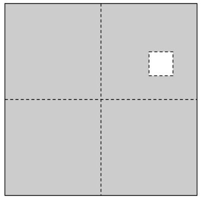
Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 8: (Continuação)

  Para isto, considere uma região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ qualquer, com um quadrado removido.

  Divida essa região em quatro regiões de tamanho $2^k \times 2^k$ como mostrado abaixo.



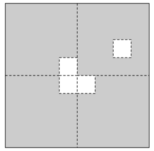


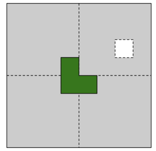
  Pela hipótese de indução, a região $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L. O problema passa a ser como a mesma hipótese indutiva pode ser aplicada às outras três regiões sem nenhum quadrado removido.

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 8: (Continuação)

  Temporariamente remova um quadrado de cada região $2^k \times 2^k$ que está "completa", formando um "buraco" como mostrado na figura à esquerda.





  Cada uma dessas três regiões tem tamanho $2^k \times 2^k$ e, portanto, pela I.H., podem ser preenchidas com peças no formato de L.

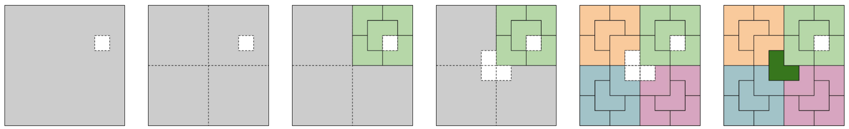
  Para finalizarmos a solução, preenchemos o "buraco" criado pelas três peças removidas de cada região cobrindo-o com uma peça L, como mostrado na figura à direita. Com isto concluímos o passo indutivo.

  Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que qualquer região de tamanho $2^n \times 2^n$, $n \geq 1$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L. $\square$

Exemplos de provas por indução matemática (fraca)

- Exemplo 8: (Continuação)

  Passo a passo do passo indutivo da prova anterior:



(a) Comece com a região de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$

(b) Divida-a em 4 regiões de tamanho $2^k \times 2^k$

(c) Use a I.H. para preencher a região com o buraco

(d) Retire um quadrado de cada região restante

(e) Aplique a I.H. em cada uma das regiões restantes

(f) Preencha o buraco com uma peça em L

$\triangleleft$

Quando usar indução matemática

- O princípio da indução pode ser utilizado para provar propriedades dos números inteiros (se elas forem verdadeiras).
- O princípio da indução não pode ser utilizado para descobrir propriedades dos números inteiros.
  - A propriedade geralmente é descoberta usando um outro método, talvez até tentativa e erro, e uma vez que uma propriedade é conjecturada, a indução pode ser usada para prová-la (caso a propriedade seja mesmo verdadeira).

Modelo de prova por indução matemática

1. Expresse a afirmação a ser provada na forma *"para todo inteiro $n \geq b$, $P(n)$"*, onde b é um inteiro fixo.
2. Escreva "Passo base." e mostre que $P(b)$ é verdadeiro, se certificando de que o valor correto de b foi utilizado. Isto conclui o passo base.
3. Escreva as palavras "Passo indutivo."
4. Escreva claramente a hipótese indutiva, na forma "Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro arbitrário fixo $k \geq b$."
5. Escreva o que precisa ser provado sob a suposição de que a hipótese de indução é verdadeira. Ou seja, escreva o que $P(k+1)$ significa.
6. Prove a afirmação $P(k+1)$ utilizando o fato de que $P(k)$ é verdadeiro. Certifique-se de que sua prova é válida para qualquer $k \geq b$.
7. Identifique claramente as conclusões do passo indutivo, e conclua-o escrevendo, por exemplo, "isto completa o passo de indução".
8. Completados o passo base e o passo indutivo, escreva a conclusão da prova: que, por indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todos os inteiros $n \geq b$.

Princípio da indução matemática (forte)

Princípio da indução matemática (forte): Introdução

- O princípio de indução que vimos até agora é conhecido como o **princípio da indução matemática fraca**:

$$[P(1) \quad \wedge \quad \forall k : (\underbrace{P(k)}_{\text{I.H.}} \rightarrow P(k+1))] \quad \rightarrow \quad \forall n : P(n)$$

  Ele recebe este nome de indução "fraca" porque a hipótese de indução (I.H.) é apenas que $P(k)$ seja verdadeiro para algum k.

- Às vezes é complicado usar a indução fraca para provar um teorema, e podemos recorrer ao **princípio da indução matemática forte**.
  - Neste princípio, a hipótese de indução é de que $P(j)$ é válido para todo $1 \leq j \leq k$.

Princípio da indução matemática (forte)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n, uma **prova** que utilize **princípio da indução matemática (forte)** possui duas partes:

  Prova por indução forte:

  Passo base: Prova-se $P(1)$;

  Passo indutivo: Prova-se que, para qualquer inteiro positivo k, se $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

- A **hipótese de indução** ou **I.H.** da indução forte é $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$ são todos verdadeiros.

- O princípio da indução matemática forte pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$[\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k : ([P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1))]}_{\text{Passo indutivo}} \rightarrow \underbrace{\forall n : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus, e você novamente se pergunta: *"Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?"*
- Mas, desta vez, você sabe que:
  1. você consegue alcançar o primeiro degrau e também o segundo degrau, e
  2. se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar dois degraus acima (ou seja, você pode subir degraus de dois em dois).
- Você consegue usar a indução fraca para verificar que conseguimos alcançar qualquer degrau dessa escada?

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Vamos tentar responder à pergunta usando indução forte.

  Vamos chamar de $P(n)$ a proposição *"Eu consigo alcançar o n-ésimo degrau da escada"*.

  Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque eu consigo alcançar o primeiro degrau. O mesmo vale para $P(2)$.

  Passo indutivo: Assumamos como hipótese de indução que para um $k \geq 2$, as proposições $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ são todas verdadeiras. Queremos mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que podemos alcançar também o $(k+1)$-ésimo degrau.

  Para ver que podemos alcançar o degrau $k+1$, note que pela I.H. alcançamos todos os degraus entre 1 e k (para $k \geq 2$), e, em particular, o degrau $k-1$. Como alcançamos $k-1$ e a regra 2 diz que uma vez que tenhamos alcançado um degrau podemos alcançar dois degraus acima, podemos alcançar o degrau $k+1$. E assim termina o passo indutivo.

  Dessa forma, a prova por indução forte está completa.

Exemplos de provas por indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 9:}}$ Se n é um inteiro maior que 1, então n pode ser escrito como o produto de números primos.

  Prova. Seja $P(n)$ a proposição *"n pode ser escrito como o produto de números primos"*.

  Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque 2 pode ser escrito como o produto de um número primo, ele mesmo.

  Passo indutivo: A hipótese de indução é que $P(j)$ é verdadeiro para todos os inteiros positivos tais que $2 \leq j \leq k$, ou seja, que qualquer inteiro j entre 2 e k pode ser escrito como o produto de primos.

  Para completar o passo indutivo, temos que mostrar que a I.H. de indução implica que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que o inteiro $k+1$ também pode ser escrito como o produto de primos.

Exemplos de provas por indução matemática

- $\boxed{\text{Exemplo 9:}}$ (Continuação)

  Há dois casos a se considerarem: $k+1$ é primo ou $k+1$ é composto.

  - Caso 1: $k+1$ é primo. Neste caso $P(k+1)$ é trivialmente verdadeiro, porque $k+1$ é o produto de um único primo, ele mesmo.
  - Caso 2: $k+1$ é composto. Neste caso $k+1$ pode ser escrito como o produto de dois inteiros a e b tais que $2 \leq a \leq b \leq k$. Pela hipótese de indução, tanto a quanto b podem ser escritos como o produto de primos (já que $P(j)$ vale para todo $2 \leq j \leq k$). Logo, $k+1 = ab$ também pode ser escrito como o produto de primos e assim concluímos o passo indutivo.

  Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como o produto de números primos. $\square$

Exemplos de provas por indução matemática (forte)

- Exemplo 10: Toda postagem de 12 centavos ou mais pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos.

Prova. Seja $P(n)$ a proposição *"qualquer postagem de n centavos pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos"*.

Passo base: Vamos precisar de quatro casos base:

- $P(12)$ é verdadeiro porque podemos usar três selos de 4 centavos;
- $P(13)$ é verdadeiro porque podemos usar dois selos de 4 centavos e um selo de 5 centavos;
- $P(14)$ é verdadeiro porque podemos usar um selos de 4 centavos e dois selos de 5 centavos; e
- $P(15)$ é verdadeiro porque podemos usar 3 selos de 5 centavos;

Isto completa o passo base.

Exemplos de provas por indução matemática (forte)

- Exemplo 10: (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é que $P(j)$ é verdadeiro para $12 \leq j \leq k$, onde k é um inteiro $k \geq 15$. Ou seja, a I.H. é que toda postagem de valores entre 12 centavos e k centavos pode ser feita usando selos de 4 e 5 centavos apenas.

Para completar o passo indutivo, vamos mostrar que, sob a I.H., $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, que uma postagem de $k+1$ centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 4 e 5 centavos.

Pela I.H., $P(k-3)$ é verdadeiro porque $k-3 \geq 12$ e para todo $12 \leq j \leq k$ temos $P(j)$ verdadeiro. Logo, existe uma maneira de postar $k-3$ centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Para postar $k+1$ centavos, basta acrescentar à postagem possível para $k-3$ centavos um selo de 4 centavos.

Isto conclui o passo indutivo e a prova. □

Exemplos de provas por indução matemática (forte)

- Exemplo 11: O Jogo de Nim possui as seguintes regras:

1. há duas pilhas de fósforos sobre a mesa;
2. dois jogadores se alternam em rodadas, sendo que em cada rodada um jogador escolhe uma pilha de fósforos e retira da mesma um número positivo de fósforos;
3. o jogador que remover o último fósforo ganha o jogo.

Mostre que se as duas pilhas de fósforos contêm inicialmente o mesmo número de fósforos, então o segundo jogador sempre pode ganhar o Jogo de Nim.

Prova. Seja n o número de fósforos em cada pilha. Seja $P(n)$ a proposição *"o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim se houver inicialmente n fósforos em cada pilha"*.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque nesse caso o primeiro jogador só tem uma opção: remover um fósforo de uma das pilhas, e assim o segundo jogador ganha ao remover o fósforo da outra pilha.

Exemplos de provas por indução matemática (forte)

- Exemplo 11: (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é a afirmação de que $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, ou seja, que o segundo jogador sempre pode vencer o Jogo de Nim em que cada pilha começa com j fósforos, sendo j um inteiro entre 1 e k.

Assumindo a I.H., precisamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, que o segundo jogador pode vencer o Jogo de Nim se cada pilha começar com $k+1$ fósforos.

Para mostrar isto, suponha que cada pilha comece com $k+1$ fósforos. Pelas regras do jogo, o primeiro jogador tem que remover um número r fósforos tal que $1 \leq r \leq k+1$. Comece por notar que se o primeiro jogador remover exatamente $k+1$ fósforos de uma pilha, o segundo jogador ganha ao remover $k+1$ fósforos da outra pilha.

Exemplos de provas por indução matemática (forte)

- $\boxed{\text{Exemplo 11:}}$ (Continuação)

  Vamos nos concentrar agora no caso de o primeiro jogador remover $1 \leq j \leq k$ fósforos de uma pilha.

  Nesse caso, o segundo jogador pode remover o mesmo número r de fósforos da outra pilha.

  Nesse caso, cada pilha passa a conter um número igual de fósforos $k + 1 - r$.

  Como $1 \leq k + 1 - r \leq k$, a hipótese de indução garante que o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim uma vez que cada pilha tenha $k + 1 - r$ fósforos.

  Logo a indução forte termina. $\square$

Princípio da Boa Ordenação

- O princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes:
  1. Toda prova que pode ser feita com indução fraca, pode ser feita também com indução forte.
     - Desafio para o aluno: como demonstrar isto?
  2. Toda prova que pode ser feita com indução forte, pode ser feita também com indução fraca.
     - Desafio para o aluno: como demonstrar isto?
- Além disso, o princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes ao seguinte axioma dos números naturais:

  Princípio da Boa Ordenação: Seja S um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Então S tem um menor elemento.

Recursão e indução estrutural

Recursão: Introdução

- Algumas vezes não é fácil definir um objeto explicitamente, mas é relativamente mais fácil defini-lo em termos de si próprio.
  1. Definição dos números naturais em termos de números naturais:
     - 0 é um número natural;
     - o sucessor de um número natural é um número natural.
- A definição de um objeto em termos de si próprio é chamada **definição recursiva**.
- A **recursão** é muito utilizada para definir, por exemplo:
  1. funções,
  2. sequências,
  3. conjuntos, e
  4. algoritmos.

Definição recursiva de funções

- Uma **definição recursiva de uma função** com domínio nos números inteiros não-negativos tem duas partes:

  Definição recursiva de função:

  Passo base: Especifica-se o valor da função em 0.

  Passo recursivo: Dá-se uma regra para encontrar o valor da função em um inteiro qualquer baseada no valor da função em inteiros menores.

Definição recursiva de funções

- Exemplo 12: Seja a função f definida como

$$\begin{cases} f(0) = 3, \\ f(n) = 2f(n-1) + 3, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

  Encontre $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$:

  - $f(1) = 2f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$;
  - $f(2) = 2f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$;
  - $f(3) = 2f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$;
  - $f(4) = 2f(3) + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 93$.

$\triangleleft$

Definição recursiva de funções

- Exemplo 13: Podemos definir a função fatorial $f(n) = n!$ recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(n) = n \cdot f(n-1), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

  Podemos então cacular $f(5)$ como:

$$\begin{aligned} f(5) &= 5 \cdot f(4) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot f(3)) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot f(2))) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot f(1)))) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot f(0))))) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)))) \\ &= 120. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Definição recursiva de funções

- Exemplo 14: Encontre uma definição recursiva para a função $f(n) = a^n$.

  Podemos fazer:

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(n) = a \cdot f(n-1), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

  Podemos então cacular $f(3)$ como:

$$\begin{aligned} f(3) &= a \cdot f(2) \\ &= a \cdot (a \cdot f(1)) \\ &= a \cdot (a \cdot (a \cdot f(0))) \\ &= a \cdot (a \cdot (a \cdot 1)) \\ &= a^3. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Definição recursiva de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 15:}}$ Definições recursivas:

Somatório:	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{0} a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$
Produtório:	$\begin{cases} \prod_{i=1}^{0} a_i = 1 \\ \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$
União:	$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{0} A_i = \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$
Interseção:	$\begin{cases} \bigcap_{i=1}^{0} A_i = U, & \text{(onde } U \text{ é o conjunto universo)} \\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap a_n, & n \geq 1 \end{cases}$

$\triangleleft$

Definição recursiva de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 16:}}$ A seguência de Fibonacci é aquela em que os dois primeiros termos são 1, e cada termo seguinte é a soma dos dois anteriores:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Esta seguência pode ser definida recursivamente como:

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 1, \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2), n \geq 2. \end{cases}$$

Para calcular $f(5)$ podemos fazer:

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + f(0) = 1 + 1 = 2, \\ f(3) &= f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3, \\ f(4) &= f(3) + f(2) = 3 + 2 = 5, \\ f(5) &= f(4) + f(3) = 5 + 3 = 8. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Definição recursiva de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 17:}}$ A função 91 de McCarthy é a função sobre os inteiros positivos definida como:

$$M(n) = \begin{cases} n - 10, & n > 100, \\ M(M(n+11)), & n \leq 100. \end{cases}$$

Podemos, então, calcular:

$$\begin{aligned} M(99) &= M(M(110)) && \text{(já que } 99 \leq 100) \\ &= M(100) && \text{(já que } 110 > 100) \\ &= M(M(111)) && \text{(já que } 100 \leq 100) \\ &= M(101) && \text{(já que } 111 > 100) \\ &= 91 && \text{(já que } 101 > 100) \end{aligned}$$

Esta função retorna 91 para todo inteiro positivo $n \leq 100$, e para inteiros positivo $n > 100$ ela começa em 91 e vai aumentando de 1 em 1.

$\triangleleft$

Definição recursiva de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 18:}}$ Seja a sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ definida explicitamente como

$$a_n = n^2 + 3n$$

Encontre uma definição recursiva para esta sequência.

Primeiro determinamos a_1:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 + 3 \cdot 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Agora determinamos a_{n+1} para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 + 3(n+1) && \text{(pela definição explícita da sequência)} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 && \text{(expandindo os produtos)} \\ &= (n^2 + 3n) + 2n + 4 && \text{(reagrupando as parcelas)} \\ &= a_n + 2n + 4 && \text{(pela definição explícita da sequência).} \end{aligned}$$

Definição recursiva de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 18:}}$ (Continuação)

  Assim obtemos a seguinte definição recursiva para a sequência:

  $$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 4, \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

  Note que o passo recursivo da definição acima define os termos $a_2, a_3, a_4 \ldots$ dando uma fórmula para calcular cada termo a_{n+1} para $n \geq 1$.

Definição recursiva de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 18:}}$ (Continuação)

  Alternativamente, podemos encontrar um passo recursivo que defina $a_2, a_3, a_4 \ldots$ dando uma fórmula para calcular a_n para $n \geq 2$.

  Primeiro determinamos a_{n-1} em função de a_n:

  $$\begin{aligned} a_{n-1} &= (n-1)^2 + 3(n-1) && \text{(pela definição explícita da sequência)} \\ &= n^2 - 2n + 1 + 3n - 3 && \text{(expandindo os produtos)} \\ &= (n^2 + 3n) - 2n - 2 && \text{(reagrupando as parcelas)} \\ &= a_n - 2n - 2 && \text{(pela definição explícita da sequência).} \end{aligned}$$

  Uma vez determinado que $a_{n-1} = a_n - 2n - 2$, podemos deduzir que $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$, o que produz a seguinte definição recursiva:

  $$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 2, \quad \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Definição recursiva de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 18:}}$ (Continuação)

  Podemos verificar que as duas definições recursivas encontradas são equivalentes à definição explícita para alguns termos da sequência:

Definição explícita: $a_n = n^2 + 3n,\ n \geq 1$	Primeira def. recursiva: $\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 4,\ n \geq 1 \end{cases}$	Segunda def. recursiva: $\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 2,\ n \geq 2 \end{cases}$
$a_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$	$a_1 = 4$	$a_1 = 4$
$a_2 = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$	$a_2 = 4 + 2 \cdot 1 + 4 = 10$	$a_2 = 4 + 2 \cdot 2 + 2 = 10$
$a_3 = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18$	$a_3 = 10 + 2 \cdot 2 + 4 = 18$	$a_3 = 10 + 2 \cdot 3 + 2 = 18$
$a_4 = 4^2 + 3 \cdot 4 = 28$	$a_4 = 18 + 2 \cdot 3 + 4 = 28$	$a_4 = 18 + 2 \cdot 4 + 2 = 28$
$a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$	$a_5 = 28 + 2 \cdot 4 + 4 = 40$	$a_5 = 28 + 2 \cdot 5 + 2 = 40$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

$\triangleleft$

Definição recursiva de conjuntos

- Uma **definição recursiva de um conjunto** tem duas partes:

  Definição recursiva de conjunto:

  Passo base: Especifica-se uma coleção inicial de objetos pertencente ao conjunto.

  Passo recursivo: Especificam-se regras para formar novos elementos a partir dos elementos já pertencentes ao conjunto.

- A definição recursiva de conjuntos também depende da seguinte regra, frequentemente implícita:

  Regra de exclusão: elementos que não podem ser gerados a partir da aplicação do passo base e instâncias do passo indutivo não pertencem ao conjunto.

Definição recursiva de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 19:}}$ Seja o conjunto S definido como:

$$\begin{cases} 3 \in S, \\ \text{se } x \in S \text{ e } y \in S, \text{ então } x + y \in S. \end{cases}$$

Então, é verdade que:

- $6 \in S$? Sim, porque $3 \in S$ e $3 + 3 = 6$,
- $9 \in S$? Sim, porque $3 \in S$ e $6 \in S$ e $3 + 6 = 9$,
- $12 \in S$? Sim, porque $3 \in S$ e $9 \in S$ e $3 + 9 = 12$,
- $7 \in S$? Não, pela regra de exclusão.

O conjunto S é o conjunto dos múltiplos positivos de 3.

$\triangleleft$

Definição recursiva de conjuntos

- Muitos problemas lidam com **palavras**, ou **strings**, formadas a partir de um **alfabeto**.
- O conjunto Σ^* de **strings** sobre um alfabeto Σ pode ser definido recursivamente como:

Passo base: $\lambda \in \Sigma^*$ (onde λ representa a string vazia, sem símbolo algum).

Passo recursivo: Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$ então $wx \in \Sigma^*$ (onde wx representa a string formada pelo símbolo x concatenado ao final do prefixo w).

Definição recursiva de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 20:}}$ Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. Qual o conjunto de strings Σ^* que pode ser formado a partir de Σ?

Sabemos que:

- $\lambda \in \Sigma^*$ pelo passo base;
- $0 \in \Sigma^*$ porque $\lambda \in \Sigma^*$, $0 \in \Sigma$, e $0 = \lambda 0$;
- $1 \in \Sigma^*$ porque $\lambda \in \Sigma^*$, $1 \in \Sigma$, e $1 = \lambda 1$;
- $00 \in \Sigma^*$ porque $0 \in \Sigma^*$, $0 \in \Sigma$, e $00 = 0 \cdot 0$;
- $01 \in \Sigma^*$ porque $0 \in \Sigma^*$, $1 \in \Sigma$, e $01 = 0 \cdot 1$;
- $011 \in \Sigma^*$ porque $01 \in \Sigma^*$, $1 \in \Sigma$, e $011 = 01 \cdot 1$;
- ...

De fato, Σ^* é o conjunto de todas as strings binárias.

$\triangleleft$

Definição recursiva de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 21:}}$ Seja ℓ (*length*) a função que retorna o tamanho de uma string, ou seja, para todo $w \in \Sigma^*$, o valor $\ell(w)$ é o número de símbolos em w.

Podemos definir ℓ recursivamente como:

Passo base: $\ell(\lambda) = 0$.

Passo recursivo: $\ell(wx) = \ell(w) + 1$, se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$.

- Podemos, então, calcular o tamanho $\ell(01011)$ como:

$$\begin{aligned} \ell(01011) &= \ell(0101) + 1 \\ &= (\ell(010) + 1) + 1 \\ &= ((\ell(01) + 1) + 1) + 1 \\ &= (((\ell(0) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= ((((\ell(\lambda) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= ((((0 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Definição recursiva de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 22:}}$ O conjunto das sentenças lógicas bem formadas pode ser definido recursivamente como:

  Passo base: T, F e s são sentenças bem formadas, onde s representa uma proposição lógica.

  Passo recursivo: Se G e H são sentenças bem formadas, então $(\neg G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são sentenças bem formadas.

- Podemos facilmente verificar que, se p e q são proposições lógicas, então:
  1. F, $(p \wedge T)$, $(p \rightarrow q)$, $((p \rightarrow q) \vee T)$ são sentenças bem formadas.
  2. $\neg pq$, $\wedge q$, TF são sentenças mal-formadas (pela regra da exclusão).

$\triangleleft$

Definição recursiva de árvores

- $\boxed{\text{Exemplo 23:}}$ Uma **árvore** é um grafo sem ciclos. Uma **árvore binária** é uma árvore em que cada nodo, com excessão das folhas, possui exatamente dois nodos filhos.

  Uma árvore binária pode ser definida recursivamente como:

  Passo base: Um vértice isolado é uma árvore binária.

  Passo recursivo: Se T_1 e T_2 são árvores binárias disjuntas com raízes r_1 e r_2, respectivamente, então pode-se formar uma nova árvore ao se conectar um vértice r (não presente em T_1 ou T_2) através de uma aressta a r_1 e outra aresta a r_2.

$\triangleleft$

Indução estrutural

- Se um conjunto tem uma definição recursiva, é possível provar propriedades dos elementos deste conjunto através de indução.
- A **indução estrutural** é uma maneira de mostrar que se:
  1. os elementos iniciais do conjunto (passo base) satisfazem uma certa propriedade, e
  2. as regras de construção de novos elementos (passo indutivo) preservam esta propriedade,

  então todos os elementos do conjunto satisfazem a propriedade.

Indução estrutural

- Uma **prova por indução estrutural** tem duas partes:

  Prova por indução estrutural:

  Passo base: Mostra-se que a proposição é válida para todos os elementos especificados no passo bse da definição recursiva do conjunto.

  Passo indutivo: Mostra-se que se a proposição é válida para cada um dos elementos usados para se construírem novos elementos do conjunto, então a proposição também é válida para estes novos elementos.

- A **hipótese de indução** é de que a proposição vale para cada um dos elementos usados para se construírem novos elementos do conjunto.

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 24:}}$ Seja o conjunto A definido como:

$$\begin{cases} 3 \in A, \\ x, y \in A \rightarrow x + y \in A. \end{cases}$$

Mostre que todos os elementos de A são divisíveis por 3.

Prova. Seja $P(x)$ a proposição *"x é divisível por 3"*.

Passo base: O único elemento da base é 3, e $P(3)$ é verdadeiro porque 3 é divisível por 3.

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 24:}}$ (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(x)$ e $P(y)$ são verdadeiros para dois elementos x e y em A. Ou seja, a I.H. é que os x e y de A são ambos divisíveis por 3.

A regra recursiva diz que posso usar x e y para incluir o elemento $x + y$ em A, logo que mostrar que $P(x + y)$ também é verdadeiro.
Para isto, note que se x e y são divisíveis por 3, então existem $k', k'' \in \mathbb{N}$ tais que $x = 3k'$ e $y = 3k''$. Nesse caso, podemos derivar:

$$x + y = 3k' + 3k'' = 3(k' + k''),$$

de onde concluímos que $x + y$ também é divisível por 3. Isto conclui o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, a prova por indução estrutural está concluída. $\square$

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 25:}}$ O conjunto das sentenças lógicas bem formadas pode ser definido recursivamente como:

Passo base: T, F e s são sentenças bem formadas, onde s representa uma proposição lógica.

Passo recursivo: Se G e H são sentenças bem formadas, então $(\neg G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são sentenças bem formadas.

Mostre que em toda sentença bem formada o número de "(" e ")" são iguais.

Prova. Seja $P(E)$ a proposição *"A expressão bem formada E tem um igual número de "(" e de ")""*.

Passo base: Os elementos da base são T, F, e qualquer proposição lógica, e todos estes elementos não possuem nenhum "(" ou ")".

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 25:}}$ (Continuação)

Passo indutivo: Temos que verificar que cada uma das regras de criação de novas sentenças mantém a propriedade de que a nova sentença possui parênteses balanceados.

Assumindo como I.H. que $P(G)$ e $P(H)$ sejam verdadeiros para duas sentenças bem formadas G e H, vamos analisar cada regra separadamente:

  - Regra "$(\neg G)$ é bem formada": pela I.H., G possui igual número de "("s e ")". Como a regra acrescenta exatamente um "(" e um ")", então $P((\neg G))$ é verdadeiro.
  - Regra "$(G \wedge H)$ é bem formada": pela I.H., tanto G quanto H possuem igual número de "("s e ")". Como a regra acrescenta exatamente um "(" e um ")", então $P((G \wedge H))$ é verdadeiro.
  - Os casos das regras para $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são semelhantes.

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 25:}}$ (Continuação)

  Tendo analisado todas as regras do caso recursivo, concluímos o passo indutivo e, assim, a prova. □

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 26:}}$ Seja o conjunto S formado por pares ordenados de números naturais definido recursivamente como:

  Passo base: $(0, 0) \in S$.

  Passo recursivo: Se $(x, y) \in S$ então $(x + 2, y + 3) \in S$ e $(x + 3, y + 2) \in S$.

  Mostre que todo elemento de S satisfaz a propriedade de que a soma de suas coordenadas é divisível por 5.

  Prova. Seja $P((x, y))$ a proposição *"$x + y$ é divisível por 5"*.

  Passo base: O único elemento da base é $(0, 0)$, e claramente $P(0, 0)$ é verdadeiro já que $0 + 0$ é divisível por 5.

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 26:}}$ (Continuação)

  Passo indutivo: Temos que verificar que cada uma das regra de criação de novos pares ordenados mantém a propriedade de que o novo par ordenado tem a soma de suas coordenadas divisível por 5. A I.H. é de que $P((x, y))$ é verdadeiro para um $(x, y) \in S$.

  Vamos analisar cada regra separadamente.

  - Regra $(x + 2, y + 3) \in S$: a soma das coordenadas deste novo par é $x + 2 + y + 3 = (x + y) + 5$. Pela I.H. $(x + y)$ é divisível por 5, logo $(x + y) + 5$ também é divisível por 5 e podemos concluir que $P((x + 2, y + 3))$ é verdadeiro.
  - Regra $(x + 3, y + 2) \in S$: a soma das coordenadas deste novo par é $x + 3 + y + 2 = (x + y) + 5$. Pela I.H. $(x + y)$ é divisível por 5, logo $(x + y) + 5$ também é divisível por 5 e podemos concluir que $P((x + 3, y + 2))$ é verdadeiro.

  Por termos analisado todas as regras do caso recursivo, o passo indutivo da prova está concluído. □

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 27:}}$ Neste exemplo provamos que a definição recursiva da sequência encontrada em um exemplo anterior está correta.

  Seja sequência $\{a_n\}$ definida explicitamente, para $n \geq 1$, como

  $$a_n = n^2 + 3n,$$

  e seja $\{b_n\}$ a sequência definida recursivamente como

  $$\begin{cases} b_1 = 4, \\ b_n = b_{n-1} + 2n + 2, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

  Mostre por indução que as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são idênticas.

  Prova. Seja $P(b_n)$ a proposição *"$b_n = n^2 + 3n$"* (ou seja, a proposição de que o elemento b_n é igual ao elemento a_n).

  Passo base: Temos $b_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$, o que é verdadeiro pelo passo base da definição recursiva.

Exemplos de provas por indução estrutural

- $\boxed{\text{Exemplo 27:}}$ (Continuação)

Passo indutivo: Assumamos a I.H. de que $P(b_{k-1})$ é verdadeiro para um b_{k-1} arbitrário na sequência, ou seja, que $b_{k-1} = (k-1)^2 + 3(k-1)$.

Queremos mostrar que $P(b_k)$ também é verdadeiro, ou seja, que $b_k = a_k$. Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned} b_k &= b_{k-1} + 2k + 2 && \text{(pela definição de } \{b_n\}) \\ &= (k-1)^2 + 3(k-1) + 2k + 2 && \text{(pela I.H.)} \\ &= k^2 - 2k + 1 + 3k - 3 + 2k + 2 \\ &= k^2 + 3k, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo e, assim, a prova. $\square$