Relações de Recorrência

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Relações de recorrência

Relações de recorrência: Introdução

- Muitos problemas de contagem não são facilmente resolvidos usando apenas as técnicas mais simples de análise combinatória, como permutação, combinação, o princípio da casa dos pombos, etc.
- Alguns destes problemas são mais facilmente resolvidos seguindo os dois passos seguintes.

  1. Encontra-se uma relação de recorrência que determine quantas soluções existem para um problema de certo tamanho em função do número de soluções de problemas de tamanho menor.

     (Ou seja, encontra-se uma definição recursiva para uma sequência em que cada termo a_n representa o número de soluções para um problema de tamanho n.)

  2. Resolve-se a relação de recorrência para se determinar uma solução explícita.

     (Ou seja, transforma-se a definição recursiva em uma definição explícita. Note que isto é o oposto do que fizemos quando estudamos recursão: lá nós vimos como transformar uma definição explícita em uma definição recursiva.)

Relações de recorrência

- Uma **relação de recorrência** para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo a_n, para $n \geq n_0$, em função de um ou mais termos prévios na sequência, ou seja, em função dos termos $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.
- Nós já estudamos anteriormente como sequências podem ser definidas recursivamente em dois passos: o passo base e o passo recursivo.
  - O passo base corresponde às **condições iniciais** da sequência, e
  - o passo recursivo corresponde ao que aqui chamamos de **relação de recorrência**.

Relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$ Seja a definição recursiva da sequência de Fibonacci abaixo.

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

O passo base ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$) corresponde às condições iniciais da relação de recorrência.

O passo recursivo ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$) corresponde à relação de recorrência.

$\triangleleft$

Relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$ Seja $\{a_n\}$ uma sequência que satisfaça a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 2$, e suponha que as condições iniciais sejam $a_0 = 3$ e $a_1 = 5$.

Determine a_2 e a_3.

Solução: Podemos calcular

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - a_0 && \text{(pela relação de recorrência)} \\ &= 5 - 3 && \text{(pelas condições iniciais)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - a_1 && \text{(pela relação de recorrência)} \\ &= 2 - 5 && \text{(usando termos anteriores)} \\ &= -3. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Soluções de uma relação de recorrência

- Uma sequência é chamada de **solução de uma relação de recorrência** se os termos desta sequência satisfazem a relação de recorrência.

Soluções de uma relação de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$ Seja a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.

Determine se cada sequência $\{a_n\}$ abaixo, definida para todo inteiro não-negativo n, é uma solução desta relação de recorrência.

  - $a_n = 3n$

    Solução: Para esta verificação, vamos substituir $a_n = 3n$ na relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$:

$$3n \stackrel{?}{=} 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2)$$
$$3n \stackrel{?}{=} 6n - 6 - 3n + 6$$
$$3n \stackrel{?}{=} 3n$$

    Como a igualdade é verdadeira para todo n, a sequência $a_n = 3n$ é solução da relação de recorrência.

Soluções de uma relação de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$ (Continuação)
  - $a_n = 2^n$

    Solução: Para esta verificação, vamos substituir $a_n = 2^n$ na relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$:

    $$2^n \stackrel{?}{=} 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-2}$$
    $$2^n \stackrel{?}{=} 2^n - 2^{n-2}$$

    Como a igualdade não é verdadeira para todo n, a sequência $a_n = 2^n$ não é solução da relação de recorrência.

Soluções de uma relação de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$ (Continuação)
  - $a_n = 5$

    Solução: Para esta verificação, vamos substituir $a_n = 5$ na relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$:

    $$5 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 5 - 5$$
    $$5 \stackrel{?}{=} 5$$

    Como a igualdade é verdadeira para todo n, a sequência $a_n = 5$ é solução da relação de recorrência.

$\triangleleft$

Modelando problemas usando relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 4:}}$ Suponha que uma pessoa deposite \$10 000 em uma poupança, e que o banco pague 11% de juros ao ano. Quanto haverá na poupança ao fim de 30 anos?

  Solução: Vamos representar por P_n o valor na poupança após n anos. Como o valor em um ano n é igual ao valor do ano anterior, P_{n-1}, acrescido dos juros de 11%, a relação de recorrência é dada por

  $$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}.$$

  A condição inicial é dada por $P_0 = 10\,000$.

Modelando problemas usando relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 4:}}$ (Continuação)

  Agora podemos resolver a relação de recorrência acima iterativamente:

  $$\begin{aligned} P_1 &= 1.11P_0 \\ P_2 &= 1.11P_1 = (1.11)^2 P_0 \\ P_3 &= 1.11P_2 = (1.11)^3 P_0 \\ &\dots \\ P_n &= 1.11P_{n-1} = (1.11)^n P_0 \end{aligned}$$

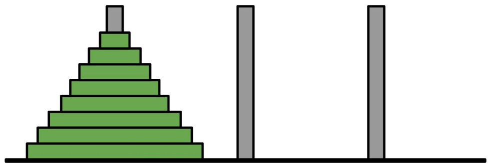
  Logo, após 30 anos a quantidade de dinheiro na poupança será

  $$P_{30} = (1.11)^{30} \cdot 10\,000 = 228\,922.97$$

$\triangleleft$

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 5: O jogo das **Torres de Hanoi** consiste em três bastões montados em uma plataforma, e um conjunto de discos de tamanhos diferentes. Inicialmente os discos estão todos posicionados no primeiro bastão, em ordem de tamanho, com o maior ao fundo.



O objetivo do jogo é mover toda a pilha de discos do primeiro bastão para um dos outros bastões, seguindo duas regras:

1. discos podem ser movidos um de cada vez, e
2. um disco maior nunca pode ser colocado acima de um disco menor.

Seja H_n o número de movimentos necessário para resolver o problema das Torres de Hanoi com n discos. Encontre uma relação de recorrência para H_n.

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 5: (Continuação)

Solução: A ideia central é supor que já sabemos como resolver o problema das Torres de Hanoi para $n-1$ discos, e usar este fato para resolver o problema para n discos.

Para mover n discos, podemos fazer o seguinte:

- Mover $n-1$ discos menores do primeiro bastão para o segundo. Isto requer H_{n-1} movimentos.
- Mover o disco maior do primeiro bastão para o terceiro. Isto requer 1 movimento.
- Mover $n-1$ discos menores do segundo bastão para o terceiro. Isto requer H_{n-1} movimentos.

Logo, o número de movimentos necessários par se mover n discos é dado pela relação de recorrência

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 5: (Continuação)

Falta apenas calcular as condições iniciais.

Precisamos de apenas 1 condição inicial, porque a relação de recorrência só faz referência ao termo imediatamente anterior. No caso $n = 0$, nenhum movimento é necessário e temos:

$$H_0 = 0$$

Logo, H_n pode ser dado por:

$$\begin{cases} H_0 = 0, \\ H_n = 2H_{n-1} + 1, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

◁

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 6: Como deduzimos no exemplo anterior, o número de movimentos necessários para resolver o problema das Torres de Hanoi com n discos é

$$\begin{cases} H_0 = 0, \\ H_n = 2H_{n-1} + 1, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Analisando pequenos valores de n, conjecture uma fórmula explícita para H_n e verifique que sua fórmula está correta.

Solução: Aplicando a fórmula de recorrência, podemos calcular:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
H_n	0	1	3	7	15	31	63	127	...

Conjectura: $H_n \stackrel{?}{=} 2^n - 1$

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 6: (Continuação)

Para provar que a conjectura está correta, vamos substituir a solução $H_n = 2^n - 1$ na relação de recorrência.

Primeiro verificamos que a solução funciona na condição inicial:

$$\begin{aligned} H_0 &= 2^0 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então verificamos que a solução funciona $H_n = 2^n - 1$ satisfaz na relação de recorrência $H_n = 2H_{n-1} + 1$:

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &\stackrel{?}{=} 2(2^{n-1} - 1) + 1 \\ 2^n - 1 &\stackrel{?}{=} 2^n - 2 + 1 \\ 2^n - 1 &\stackrel{?}{=} 2^n - 1. \end{aligned}$$

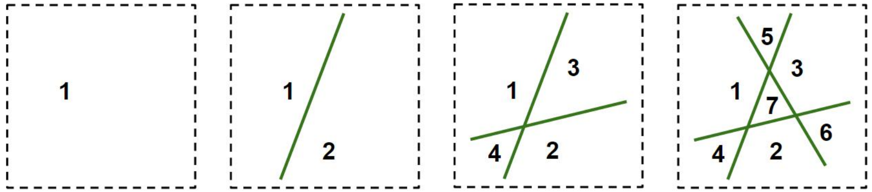
Como a solução satisfaz a relação para todo n, ela está correta.

◁

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 7: Encontre uma relação de recorrência para o número máximo de regiões L_n determinado por n retas no plano.

Solução: Vamos começar analisando L_n para pequenos valores de n.



$L_0 = 1$ $L_1 = 2$ $L_2 = 4$ $L_3 = 7$

Note que o número máximo de regiões ocorre quando cada uma das n retas corta todas as demais $n - 1$ retas em pontos diferentes.

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 7: (Continuação)

Para encontrar a relação de recorrência, vamos assumir que já sabemos o número regiões L_{n-1} formadas por $n-1$ retas no plano, e então determinar o que acontece quando adicionamos uma nova reta.

Quando adicionamos uma nova reta, ela criará um número máximo de regiões somente se ela cortar todas as $n-1$ retas já presentes no plano. Assim, a nova reta é dividida em n segmentos, e cada um destes segmentos delimita duas regiões no plano:

- uma região que já estava no plano antes da reta ser adicionada, e
- uma região que foi criada quando a reta cortou a região já existente.

Assim, uma nova reta adiciona n novas regiões no plano às L_{n-1} regiões já existentes. Logo, a relação de recorrência é

$$L_n = L_{n-1} + n.$$

Modelando problemas usando relações de recorrência

- Exemplo 7: (Continuação)

Falta apenas calcular as condições iniciais. Precisamos de apenas uma condição inicial porque a relação de recorrência faz referência apenas ao termo ineditamente anterior na sequência. Assim derivamos

$$L_0 = 1,$$

já que um plano sem retas tem apenas uma região.

Logo, o número máximo L_n de regiões no plano cortado por n retas é dado pela relação de recorrência:

$$\begin{cases} L_0 = 1, \\ L_n = L_{n-1} + n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Resolver.

◁

Modelando problemas usando relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$ Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. Chamamos de Σ^n o conjunto das strings sobre o alfabeto Σ que contêm exatamente n símbolos. Por exemplo:
  - $\Sigma^0 = \{\lambda\}$,
  - $\Sigma^1 = \{0, 1\}$,
  - $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$,
  - ...

  Determine quantas strings em Σ^n não contêm o padrão 00.

Modelando problemas usando relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$ (Continuação)

  Solução: Vamos chamar de s_n o número de strings em Σ^n que não contêm 00.

Tamanho n	Strings sem 00	s_n: N° de strings sem 00
0	λ	1
1	0, 1	2
2	01, 10, 11	3
3	010, 011, 101, 110, 111	5

  Vamos procurar uma relação de recorrência para $\{s_n\}$.

  A ideia central é supor que já sabemos o número de strings de tamanho $0 < k < n$ que não contêm 00, ou seja, que s_k é conhecido para $0 < k < n$, e usar este fato para determinar s_n.

Modelando problemas usando relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$ (Continuação)

  As strings de tamanho n podem ser divididas em dois conjuntos disjuntos: as que terminam em 0 e as que terminam em 1. O total de strings procuradas é a soma das strings em cada um destes dois conjuntos.

  - *Strings de tamanho n terminadas em 1:* Neste caso, qualquer string de tamanho $n-1$ que não contém 00 também é uma string de tamanho n que não contém 00.

    Logo, este grupo contribui com s_{n-1} strings aceitáveis.
  - *Strings de tamanho n terminadas em 0:* Neste caso, temos que desconsiderar as strings de tamanho $n-1$ que terminam em 0, senão a string de tamanho n terminaria em 00. Logo, só podemos adicionar 0 ao final de uma string de tamanho $n-1$ que termine em 1, ou seja, a contribuição deste grupo está limitada a strings de tamanho n que terminem em 10. Isso quer dizer que o número de strings que não contêm 00 neste grupo é exatamente o número de strings de tamanho $n-2$ que não contém 00.

    Logo, este grupo contribui com s_{n-2} strings aceitáveis.

Modelando problemas usando relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$ (Continuação)

  Como as contribuições são disjuntas, a relação de recorrência fica sendo

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}.$$

  Falta apenas calcular as condições iniciais. Precisamos de 2 condições iniciais porque a relação de recorrência faz referência aos dois termos imediatamente anteriores:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \quad \text{já que a única string de tamanho 0, } \lambda\text{, não contém 00, e} \\ s_1 &= 2, \quad \text{já que as duas strings de tamanho 1 não contêm 00.} \end{aligned}$$

  Logo, o número de strings s_n de tamanho n que não contém 00 é dado por:

$$\begin{cases} s_0 = 1, \\ s_1 = 2, \\ s_n = s_{n-1} + s_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

$\lhd$

Modelando problemas usando relações de recorrência

- $\boxed{\text{Exemplo 9:}}$ Defina recursivamente o conjunto de todos os subconjuntos dos números naturais que não contenham simultaneamente os números 1 e 2.

  Solução:
  O conjunto S de todos os subconjuntos dos naturais que não contenham simulataneamente os números 1 e 2 pode ser definido recursivamente como a seguir.

$$\begin{cases} \emptyset \in S, \\ \text{se } A \in S \text{ e } x \in \mathbb{N},\ x \neq 1 \text{ e } x \neq 2, \text{ então } A \cup \{x\} \in S, \\ \text{se } A \in S \text{ e } 1 \notin A, \text{ então } S \cup \{1\} \in S, \\ \text{se } A \in S \text{ e } 2 \notin A, \text{ então } S \cup \{2\} \in S. \end{cases}$$

$\lhd$

Resolução de relações de recorrência lineares homogêneas

Relações de recorrência lineares homogêneas: Introdução

- Uma vez encontrada a relação de recorrência para um problema, é muitas vezes desejável converter esta relação em uma fórmula explícita.
- Não existe uma técnica geral capaz de resolver toda relação de recorrência: cada caso é um caso.

  Uma abordagem possível é estudar como a sequência se comporta em seus termos iniciais, conjecturar uma fórmula fechada a partir disso, e verificar se a conjectura está correta (como fizemos para a Torre de Hanoi).
- Para a classe das relações de recorrência lineares homogêneas, porém, existe uma abordagem mais simples.
  - Estas relações são muito comuns em várias áreas, e por isto merecem ser estudadas separadamente.
  - Em particular, elas ocorrem muito na análise de complexidade de algoritmos.

Relações de recorrência lineares homogêneas

- Uma **relação de recorrência linear homogênea de grau k com coeficientes constantes** é uma relação de recorrência da forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

  onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são números reais, e $c_k \neq 0$.
- A relação é:
  - **linear** porque o lado direito da igualdade é a soma de termos anteriores multiplicados por uma função de n;
  - **homogênea** porque não há termos que não sejam múltiplos de a_js;
  - **de grau** k porque a_n é expresso em termos de k termos prévios; e
  - **com coeficientes constantes** porque os coeficientes não dependem de n.

Relações de recorrência lineares homogêneas

- Exemplo 10: Os seguintes são exemplos de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes:
  1. $P_n = (1.11)P_{n-1}$ é uma relação de recorrência linear homogênea de grau 1;
  2. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ é uma relação de recorrência linear homogênea de grau 2;
  3. $a_n = a_{n-5}$ é uma relação de recorrência linear homogênea de grau 5.

  Já os seguintes não são exemplos de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes:

  4. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ não é linear, já que o termo a_{n-2}^2 é o quadrado de um termo anterior;
  5. $H_n = 2H_{n-1} + 1$ não é homogênea, já que o termo 1 não é o produto de um termo anterior;
  6. $B_n = nB_{n-1}$ não possui coeficientes constantes.

◁

Solução de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- Seja a relação de recorrência linear homogênea com coeficientes constantes

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}.$$

Os seguintes passos levam a uma solução para esta relação.

(A prova de por que esta técnica é válida encontra-se no livro-texto da disciplina.)

1. Substitua cada termo a_i da relação de recorrência por r^i, obtendo:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k}.$$

2. Divida a equação resultante pela menor potência de r, ou seja, r^{n-k}, determinando assim a **equação característica** da relação de recorrência:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_k.$$

Solução de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

3. Determine as **raízes características** $r_1, r_2, \cdots, r_k$ da equação característica.
4. Se as raízes são distintas, a equação

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n \quad (1)$$

representa todas as possíveis soluções da relação de recorrência, onde α_1, α_2, ..., α_k são constantes.

Use as condições iniciais da relação de recorrência para montar um sistema de equações e determinar as constantes α_1, α_2, ..., α_k.

5. Use os valores das constantes encontradas para escrever a solução dada pela equação (1) acima.

É recomendável verificar se a solução encontrada está correta.

Solução de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- Exemplo 11: Resolva a relação de recorrência

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 7, \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Solução: Vamos começar substituindo cada ocorrência de a_i por r^i na relação de recorrência:

$$r^n = r^{n-1} + 2r^{n-2}.$$

Agora, dividimos a equação obtida por pela menor potência de r, ou seja, por r^{n-2}, obtendo a equação característica:

$$r^2 = r + 2.$$

Solução de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- $\boxed{\text{Exemplo 11:}}$ (Continuação)

  Resolvendo a equação característica, encontramos as raízes características $r_1 = -1$ e $r_2 = 2$.

  Sabemos que a solução da relação de recorrência tem a forma

  $$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(2)^n,$$

  onde α_1 e α_2 são constantes.

  Para encontrar os valores α_1 e α_2, utilizamos as condições iniciais para determinar que

  $$a_0 = \alpha_1(-1)^0 + \alpha_2(2)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \qquad \text{e}$$
  $$a_1 = \alpha_1(-1)^1 + \alpha_2(2)^1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 7.$$

Solução de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- $\boxed{\text{Exemplo 11:}}$ (Continuação)

  Assim, as condições iniciais determinam o sistema de equações

  $$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 7, \end{cases}$$

  cuja solução é $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 3$.

  Logo, a solução final é

  $$\begin{aligned} a_n &= -1 \cdot (-1)^n + 3 \cdot 2^n, \\ &= (-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

  para todo n inteiro não-negativo.

Solução de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- $\boxed{\text{Exemplo 11:}}$ (Continuação)

  É recomendado verificar se a solução encontrada está correta.

  Para isto, primeiro verificamos que a solução explícita satisfaz as condições iniciais da relação de recorrência:

  $$a_0 = (-1)^{0+1} + 3 \cdot 2^0 = 2,$$

  e

  $$a_1 = (-1)^{1+1} + 3 \cdot 2^1 = 7.$$

Solução de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- $\boxed{\text{Exemplo 11:}}$ (Continuação)

  Para terminar a verificação, substituímos a solução $a_n = (-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n$ encontrada na relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ original.

  $$(-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n \stackrel{?}{=} [(-1)^{(n-1)+1} + 3 \cdot 2^{n-1}] + 2[(-1)^{(n-2)+1} + 3 \cdot 2^{n-2}]$$
  $$(-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n \stackrel{?}{=} (-1)^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}$$
  $$(-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n \stackrel{?}{=} [(-1)^n + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}] + [2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1}]$$
  $$(-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n \stackrel{?}{=} (-1)^{n-1} + 3 \cdot 2^n$$
  $$(-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n \stackrel{?}{=} (-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^n$$

  Como a solução encontrada está de acordo com as condições iniciais e a relação de recorrência, ela está correta.

  $\triangleleft$

Solucão de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- $\boxed{\text{Exemplo 12:}}$ Encontre uma solução explícita para a sequência de Fibonacci:

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Solução: Vamos começar substituindo cada ocorrência de a_i por r^i na relação de recorrência:

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}.$$

Agora, dividimos a equação obtida por pela menor potência de r, ou seja, por r^{n-2}, obtendo a equação característica:

$$r^2 = r + 1.$$

Solucão de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- $\boxed{\text{Exemplo 12:}}$ (Continuação)

Resolvendo a equação característica, encontramos as raízes características $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Sabemos então que a solução da relação de recorrência tem a forma

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

onde α_1 e α_2 são constantes.

Agora utilizamos as condições iniciais para determinar que

$$a_0 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \qquad \text{e}$$

$$a_1 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1.$$

Solucão de relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes

- $\boxed{\text{Exemplo 12:}}$ (Continuação)

Assim, as condições iniciais determinam o sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\alpha_2 = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$ e $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$.

Logo, a solução final é

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

para todo n inteiro não-negativo.

$\triangleleft$