

Análise Combinatória

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Princípios básicos da contagem

Análise combinatória: Introdução

- A **análise combinatória**, ou **contagem**, é o estudo do arranjo de objetos.
- Como uma área de estudo, a análise combinatória surgiu no século XVII com o intuito de se estudarem os jogos de azar.
- Em Ciência da Computação, questões de contagem são essenciais: computar frequentemente envolve arranjar objetos de alguma forma.

A análise combinatória é essencial em diversos ramos, incluindo:

- 1 Análise de complexidade de algoritmos.
- 2 Teoria de probabilidades.
- 3 Inteligência artificial.
- 4 Teoria da informação.
- 5 ...

Princípios básicos da contagem: Introdução

- Os problemas de análise combinatória envolvem contar de quantas maneiras uma coleção de objetos pode ser arranjada, de acordo com algumas restrições dadas.
- Contar as maneiras de se arranjar a coleção de objetos fica geralmente mais fácil se quebrarmos o arranjo em etapas consecutivas e/ou alternativas.
- Os **princípios básicos da contagem** determinam como combinar as maneiras de se completar cada uma etapa do problema de forma a obter uma solução para o problema como um todo.
 - O **princípio da multiplicação**, ou **regra do produto**, determina como compor etapas consecutivas da solução de um problema.
 - O **princípio da adição**, determina como compor etapas alternativas da solução de um problema.

O princípio da multiplicação

- O **princípio da multiplicação** diz que, se uma operação pode ser quebrada em uma sequência de k passos consecutivos em que
 - o primeiro passo pode ser executado de n_1 formas diferentes,
 - o segundo passo pode ser executado de n_2 formas diferentes,
 - ... e
 - o k -ésimo passo que pode ser executado de n_k formas diferentes,

então a operação completa pode ser executada de

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

maneiras diferentes.

O princípio da multiplicação

- **Exemplo 1:** Seja um código de identificação que
 - 1 é formado por uma sequência de quatro símbolos,
 - 2 onde cada símbolo é escolhido de um conjunto formado pelas 26 letras do alfabeto e os 10 dígitos.

Quantos códigos de identificação distintos existem se repetição de símbolos é permitida?

Solução: A operação de se formar um código de identificação pode ser quebrada em quatro etapas consecutivas, cada uma correspondendo à escolha de um símbolo.

Cada etapa pode ser completada de 36 maneiras diferentes, já que há 36 possíveis símbolos: $S = \{A, \dots, Z, 0, \dots, 9\}$.

Assim, pelo princípio da multiplicação existem

$$36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^4 = 1\,679\,616$$

códigos de identificação distintos.

O princípio da multiplicação

- **Exemplo 2:** Considere um cenário análogo ao anterior, mas em que um código de identificação não pode apresentar símbolos repetidos.

Neste caso, quantos códigos de identificação existem?

Solução: A operação de se formar um código de identificação pode ser quebrada em quatro etapas consecutivas, cada uma correspondendo à escolha de um símbolo.

A primeira etapa pode ser completada de 36 maneiras diferentes, já que há 36 possíveis símbolos.

A partir da segunda etapa, cada etapa pode ser completada de uma maneira a menos que a etapa anterior, já que símbolos não podem se repetir.

Assim, pelo princípio da multiplicação existem

$$36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = 1\,413\,720$$

códigos de identificação distintos sem símbolos repetidos.

O princípio da multiplicação

- **Exemplo 3:** Suponha que A_1, A_2, A_3, A_4 são conjuntos com n_1, n_2, n_3, n_4 elementos, respectivamente.

Mostre que o conjunto $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ tem $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ elementos.

Solução: Podemos quebrar a operação de formar uma tupla ordenada de 4 elementos em quatro etapas consecutivas:

- escolhe-se um elemento $a_1 \in A_1$, e há n_1 maneiras de se fazer isto,
- escolhe-se um elemento $a_2 \in A_2$, e há n_2 maneiras de se fazer isto,
- escolhe-se um elemento $a_3 \in A_3$, e há n_3 maneiras de se fazer isto, e
- escolhe-se um elemento $a_4 \in A_4$, e há n_4 maneiras de se fazer isto.

Logo, pelo princípio da multiplicação há

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$$

tuplas distintas no conjunto $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$.

O princípio da multiplicação

- Exemplo 4: Quantas funções existem entre um conjunto de m elementos e um conjunto de n elementos?

Solução: Podemos construir uma função em etapas consecutivas da seguinte forma. Ordene os elementos do domínio na forma a_1, a_2, \dots, a_m , e para cada um destes elementos escolha um dos n elementos do contra-domínio para ser sua imagem.

Como há m etapas consecutivas (uma para cada elemento do domínio), em que cada etapa pode ser completada de n maneiras distintas (qualquer elemento do contra-domínio pode ser escolhido), pela regra do produto há

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{m \text{ vezes}} = n^m$$

funções de um conjunto de m elementos para um conjunto de n elementos. ◀

O princípio da multiplicação

- Exemplo 5: Quantas funções injetivas existem entre um conjunto de m elementos e um conjunto de n elementos?

Solução: Primeiro, note que se $m > n$ não existe nenhuma função injetiva entre os conjuntos (pois o contra-domínio é menor que o domínio).

Assumindo que $m \leq n$, podemos construir uma função injetiva da seguinte forma. Ordene os elementos do domínio na forma a_1, a_2, \dots, a_m , e então

- escolha a imagem de a_1 entre os n valores possíveis do contra-domínio,
- escolha a imagem de a_2 entre os $n - 1$ valores possíveis do contra-domínio (exceto o valor que já foi associado a a_1),
- escolha a imagem de a_3 entre os $n - 2$ valores possíveis do contra-domínio (exceto os valores que já foram associados a a_1 e a a_2),
- ... e
- escolha a imagem de a_n entre os $n - (m - 1)$ valores possíveis.

Logo, há $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - m + 1)$ funções injetivas de um conjunto de m elementos para um conjunto de n elementos. ◀

O princípio da multiplicação

- Exemplo 6: Quantos inteiros de três dígitos são divisíveis por 5?

Solução: Observe que:

- Os números inteiros candidatos estão no intervalo $[100, 999]$.
- Os números candidatos terminam em 0 ou 5.

Os números divisíveis por 5 nesse intervalo podem ser “criados” a partir da concatenação de dígitos provenientes dos seguintes conjuntos, nessa ordem:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \{0, 5\}$$

Assim, o número de maneiras de se “criar” um número é o produto do número de maneiras de se escolher o primeiro dígito, o número de maneiras de se escolher o segundo dígito e o número de maneiras de se escolher o terceiro dígito.

Logo há $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ inteiros de três dígitos divisíveis por 5. ◀

O princípio da multiplicação

- Exemplo 7: Um **palíndromo** é uma sequência de símbolos simétrica, ou seja, uma sequência igual se lida de frente para trás ou de trás para frente. Quantos números de 5 dígitos são palíndromos?

Solução: Podemos quebrar a operação de construir um número de 5 dígitos em cinco etapas, sendo cada etapa a escolha de um dígito d_i , $1 \leq i \leq 5$:

$$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$$

Sabemos que, se o número for palíndromo,

- para escolha de d_1 há 9 opções (dígito 0 não é uma opção),
- para escolha de d_2 há 10 opções (qualquer dígito de 0 a 9),
- para escolha de d_3 há 10 opções (qualquer dígito de 0 a 9),
- para escolha de d_4 há apenas 1 opção (temos que ter $d_4 = d_2$), e que
- para escolha de d_5 há apenas 1 opção (temos que ter $d_5 = d_1$).

Logo há $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$ palíndromos de 5 dígitos. ◀

O princípio da adição

- Existem problemas de contagem que podem ser resolvidos contando-se o número de maneiras alternativas de se resolver o problema.
- No geral, estes problemas envolvem contar quantos elementos existem na
 - união de dois conjuntos disjuntos,
 - diferença entre dois conjuntos, e/ou
 - intersecção de dois conjuntos.
- O princípio a ser usado neste caso é chamado de princípio da adição.

O princípio da adição

- O **princípio da adição** diz que se uma operação pode ser completada de maneiras alternativas em que
 - a primeira alternativa apresenta n_1 possibilidades,
 - a segunda alternativa apresenta n_2 possibilidades,
 - ... e
 - a k -ésima alternativa apresenta n_k possibilidades

e, além disso, todas as n_1, n_2, \dots, n_k possibilidades são todas disjuntas, então a operação pode ser executada de

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

maneiras diferentes.

O princípio da adição

- Alternativamente, o **princípio da adição** diz que
 - 1 se A é o conjunto de todas as maneiras de se realizar uma operação, e
 - 2 A pode ser particionado em **conjuntos disjuntos** A_1, A_2, \dots, A_k ,então o número de maneira de se completar a operação é:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$$

- Quando o conjunto A é quebrado em **conjuntos não-disjuntos** A_1, A_2, \dots, A_k , o **princípio da inclusão-exclusão de conjuntos** e suas fórmulas se tornam úteis:

- $|A_i \cup A_j| = |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|$
- $|A_i \cup A_j \cup A_h| = |A_i| + |A_j| + |A_h| - |A_i \cap A_j| - |A_i \cap A_h| - |A_j \cap A_h| + |A_i \cap A_j \cap A_h|$
- $|A - B| = |A| - |B|$, desde que $B \subset A$

O princípio da adição

- **Exemplo 8:** De quantas maneiras podemos obter uma carta Q ou uma carta K de um baralho?

Solução: Sabemos que:

- há 4 maneiras de se tirar uma carta Q, e
- há 4 maneiras de se tirar uma carta K.

Como o número de maneiras de se tirar um Q é disjunto do número de maneiras de se tirar um K, podemos usar o princípio da adição para concluir que há

$$4 + 4 = 8$$

maneiras de se tirar um Q ou K no baralho.



O princípio da adição

- Exemplo 9: De quantas maneiras podemos obter uma carta Q ou uma carta vermelha de um baralho?

Solução: Podemos separar o conjunto de soluções em dois conjuntos: o de cartas Q e o de cartas vermelhas. Porém, note que estes dois conjuntos não são disjuntos!

Pelo princípio da adição, o número de soluções para o problema é dado por:

$$|\text{cartas Q ou vermelha}| = |\text{cartas Q}| + |\text{cartas vermelhas}| - |\text{cartas Q e vermelhas}|$$

Sabemos que

- há 4 maneiras de se tirar uma carta Q,
- há 26 maneiras de se tirar uma carta vermelha (metade do baralho de 52 cartas), e
- há 2 maneiras de se tirar uma carta, ao mesmo tempo, Q e vermelha,

logo há $4 + 26 - 2 = 28$ maneiras de se tirar um Q ou uma carta vermelha.



Combinando o princípio da multiplicação e o da adição

- Exemplo 10: Uma senha de usuário de um sistema computacional pode ser formada por sequências de uma a três letras maiúsculas, sendo que repetições são permitidas.

Quantas senhas diferentes existem?

Solução: Começamos por observar que o conjunto de todas as senhas pode ser particionado nos subconjuntos de senhas de uma, duas e três letras.

Em cada um desses subconjuntos temos a seguinte quantidade de senhas:

- Uma letra: 26
- Dois letras: $26 \cdot 26 = 26^2$ (pelo princípio da multiplicação)
- Três letras: $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$ (pelo princípio da multiplicação)

Como os subconjuntos são todos disjuntos, pelo princípio da adição temos $26 + 26^2 + 26^3 = 18\,278$ senhas de usuário diferentes.



Combinando o princípio da multiplicação e o da adição

- Exemplo 11: Quantos números inteiros ímpares existem no intervalo $[10, 99]$ com dígitos distintos?

Solução: Pelo princípio da adição, podemos representar o espaço de soluções da seguinte forma:

$$\left| \begin{array}{l} \text{ímpares em } [10, 99] \\ \text{com dígitos distintos} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{ímpares em } [10, 99] \\ \text{com dígitos repetidos} \end{array} \right|$$

Pelo princípio da multiplicação, podemos calcular $|\text{ímpares em } [10, 99]|$ como:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} \text{ímpares em } [10, 99] \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{l} \text{maneiras de escolher} \\ \text{dígito das dezenas} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{l} \text{maneiras de escolher} \\ \text{dígito das unidades} \end{array} \right| \\ &= 9 \cdot 5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Note que há 5 ímpares em $[10, 99]$ com dígitos repetidos: 11, 33, 55, 77, 99.

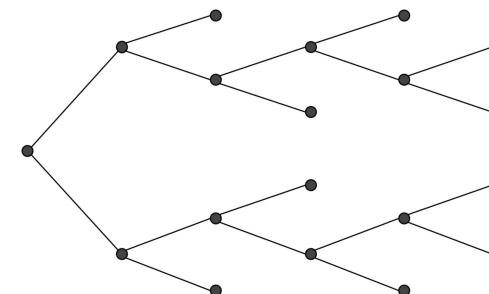
Logo, o número de ímpares em $[10, 99]$ sem dígitos repetidos é $45 - 5 = 40$.



Árvores de possibilidades

- Muitas vezes queremos contar de quantas maneiras distintas uma sequência de eventos podem acontecer.
- Árvores são estruturas úteis para registrar todas as possibilidades em situações em que os eventos ocorrem em sequência.

(Uma árvore é um tipo particular de um grafo em que não existem ciclos.)



Árvores de possibilidades

- Exemplo 12: Suponha que haja um torneio disputado entre dois times A e B , sendo que

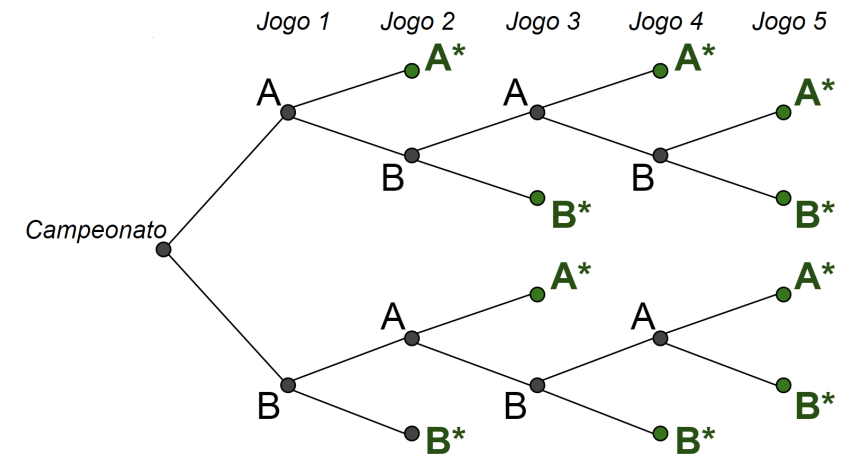
- cada jogo tem sempre um vencedor, e
- um time é declarado campeão se vencer dois jogos consecutivos ou um total de três jogos.

De quantas formas distintas o torneio pode ser jogado?

Árvores de possibilidades

- Exemplo 12: (Continuação)

Solução: Começamos por montar a árvore de possibilidades para a sequência e jogos, onde X^* indica que o time X é vencedor.



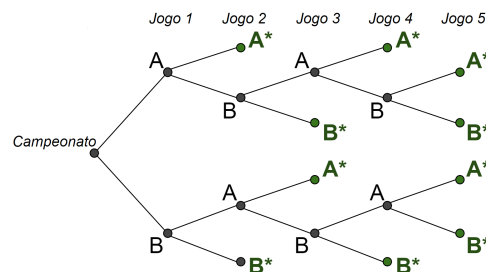
Árvores de possibilidades

- Exemplo 12: (Continuação)

Cada folha da árvore de possibilidades corresponde a uma possibilidade diferente para o torneio ser jogado.

Logo, há 10 formas diferentes de o torneio ser jogado:

- AA^*
- $ABABA^*$
- ABB^*
- $BABAA^*$
- $BABB^*$
- $ABAA^*$
- $ABABB^*$
- BAA^*
- $BABAB^*$
- BB^*



Árvores de possibilidades

- Exemplo 13: Em comissão as posições de presidente, tesoureiro e secretário têm que ser escolhidas entre quatro pessoas A , B , C e D . Além disso, existem duas restrições:

- A não pode ser presidente, e
- C ou D deve ser o secretário.

Quantas escolhas distintas existem para a comissão?

Solução: A princípio, poderia ser tentador utilizar o princípio da multiplicação para resolver o problema, raciocinando da seguinte forma:

- há 3 escolhas para presidente, já que A não pode ser;
- há 3 escolhas para o tesoureiro (tirando quem já foi escolhido para presidente);
- há 2 escolhas para secretário: C ou D .

Assim haveria $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ possibilidades para se montar a comissão.

Entretanto, esta solução é incorreta. Por quê?

Árvores de possibilidades

- Exemplo 13: (Continuação)

Observe que o número de possibilidades de se completar cada etapa da operação não é constante:

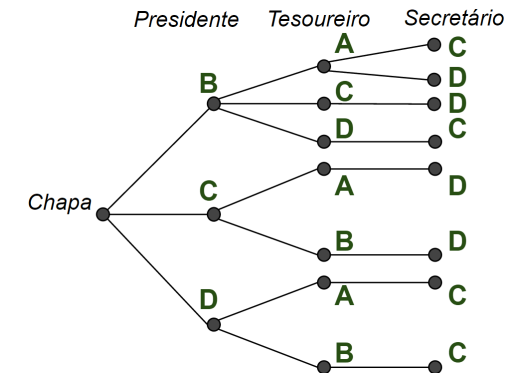
- O número de possibilidades para a escolha de secretário depende de como o presidente e o tesoureiro são escolhidos.

Este exemplo ilustra um problema central de análise combinatória: em geral a dificuldade não está em como contar, mas em o que contar!

Árvores de possibilidades

- Exemplo 13: (Continuação)

Para abordar o problema de forma mais cuidadosa, vamos construir sua árvore de possibilidades:



Cada folha da árvore representa uma opção, logo há 8 comissões possíveis.



O princípio da casa dos pombos

O princípio da casa dos pombos: Introdução

- Imagine que, ao anoitecer, um bando de 101 pombos em revoada decide descansar.

Os pombos então descem para suas casinhas, mas só há 100 delas.

Pergunta: Se todos os 101 pombos forem se distribuir em 100 casinhas, o que podemos concluir sobre a alocação dos pombos?

Resposta: Que pelo menos uma casinha vai ter que abrigar pelo menos dois pombos (quer os pombos sejam bons amigos ou não!)

- Esta observação sobre os pombos e suas casinhas, por mais trivial que pareça, tem profundas implicações matemáticas e, em especial, na análise combinatória.

O princípio da casa dos pombos

- **Teorema: (Princípio da Casa dos Pombos)** Se k é um inteiro positivo e $k + 1$ objetos devem ser colocados em k caixas, então pelo menos uma caixa deve conter dois ou mais objetos.

Prova. Por contradição. Assuma que possamos distribuir $k + 1$ objetos em k caixas de forma que nenhuma caixa contenha 2 ou mais objetos.

Isto quer dizer que cada caixa contém no máximo 1 objeto, e como há k caixas, no máximo k objetos podem ter sido guardados.

Mas isto contradiz nossa premissa de os $k + 1$ objetos foram guardados nas caixas. \square

O princípio da casa dos pombos

- **Exemplo 14:** Num grupo de 367 pessoas, ao menos duas fazem aniversário no mesmo dia, já que há no máximo 366 aniversários possíveis.

Para ver o porquê, podemos usar o princípio da casa dos pombos, em que os pombos representarem as pessoas e os casinhas representarem os aniversários.

Como há mais pombos do que casinhas, pelo menos uma casinha tem mais que um pombo. \triangleleft

O princípio da casa dos pombos

- O princípio da casa dos pombos pode ser generalizado da seguinte forma.
- **Teorema: (Princípio Generalizado da Casa dos Pombos)** Se N objetos devem ser distribuídos entre k caixas, então pelo menos uma caixa receberá no mínimo $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Prova. Por contradição, assuma que todas as caixas tenham no máximo $\lceil N/k \rceil - 1$ objetos.

Logo, o número total de objetos é no máximo

$$\begin{aligned} k \cdot \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) &< k \cdot \left(\left(\frac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right) \quad (\text{já que sempre } \lceil N/k \rceil < (N/k) + 1) \\ &< k \cdot \left(\frac{N}{k} \right) \\ &= N. \end{aligned}$$

Como derivamos que $k < N$, chegamos a uma contradição. \square

O princípio da casa dos pombos

- **Exemplo 15:** Mostre que num grupo de 85 pessoas, a primeira letra dos nomes de pelo menos quatro pessoas é a mesma.

Solução: Vamos utilizar o princípio da casa dos pombos. Deixemos as pessoas fazerem o papel de pombos e as letras do alfabeto fazerem o papel das casinhas.

Temos 85 pombos para 26 casinhas, logo pelo princípio da casa dos pombos pelo menos uma casinha deve ter $\lceil 85/26 \rceil = 4$ pombos.

Assim, a letra inicial dos nomes de pelo menos quatro pessoas é a mesma. \triangleleft

O princípio da casa dos pombos

- **Exemplo 16:** Quantas pessoas precisamos ter numa sala para garantir que ao menos 3 sejam do mesmo signo?

Solução: Vamos utilizar o princípio da casa dos pombos, em que signos são casinhas e pessoas são pombos.

Sabemos que há $k = 12$ signos (casinhas) e queremos descobrir qual o número N de pessoas (pombos) necessário para garantir que ao menos 3 pessoas tenham o mesmo signo (ou seja, que ao menos uma casinha tenha pelo menos três pombos).

O princípio da casa dos pombos garante que isto ocorrerá a partir do menor N que satisfizer $\lceil N/k \rceil \geq 3$, ou seja, a partir do primeiro N tal que $\lceil N/12 \rceil \geq 3$. Isto ocorre quando $N \geq 25$.

Logo, são necessárias 25 pessoas para garantir que ao menos 3 tenham o mesmo signo.



O princípio da casa dos pombos: Aplicações interessantes

- **Exemplo 17:** Seja S um conjunto com cinco números inteiros positivos e distintos menores ou iguais a 8.

Prove que ao menos dois subconjuntos não-vazios distintos de S possuem o mesmo valor para a soma de seus elementos.

Solução: Seja s_A a soma dos números de um subconjunto não-vazio de S .

Qualquer subconjunto de S tem como soma de seus elementos o valor máximo de

$$s_A \leq 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30,$$

já que a maior soma acontece quando $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

De outro lado, qualquer subconjunto de S tem uma soma de no mínimo

$$s_A \geq 1,$$

já que a menor soma acontece quando $A = \{1\}$.

O princípio da casa dos pombos: Aplicações interessantes

- **Exemplo 17:** (Continuação)

Logo, qualquer que seja o subconjunto A de S que tomemos, teremos

$$1 \leq s_A \leq 30,$$

o que quer dizer que há 30 resultados diferentes para a soma dos elementos de um subconjunto de S .

Mas note que como S possui 5 elementos, S possui $2^5 - 1$ conjuntos não-vazios.

Assim, há 31 subconjuntos possíveis (pombos) e apenas 30 somas possíveis (casinhas), logo, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos dois subconjuntos têm a mesma soma.



O princípio da casa dos pombos: Aplicações interessantes

- **Exemplo 18:** Num grupo de seis pessoas, cada par de pessoas consiste em ou dois amigos ou dois inimigos.

Mostre que há ou 3 amigos mútuos ou 3 inimigos mútuos neste grupo.

Prova. Seja A uma das seis pessoas. Das demais 5 pessoas no grupo, pelo menos 3 são amigas de A ou pelo menos 3 são inimigas de A : isto corre porque, pelo princípio da casa dos pombos, há apenas duas casinhas (amigo/inimigo) para se colocarem 5 pombos (as cinco pessoas), logo pelo menos uma casinha terá pelo menos $\lceil 5/2 \rceil = 3$ pombos.

Começamos analisando o caso em que pelo menos 3 dessas pessoas são amigas de A . Chamemos estes 3 amigos de A de B , C e D . Se quaisquer duas pessoas dentre este 3 amigos forem amigos entre si, então estas duas pessoas e a pessoa A formam um grupo de três amigos mútuos. Se, por outro lado, se nenhum par em B , C e D for de amigos, B , C e D formam um grupo de inimigos mútuos.

Para finalizar, o caso em que pelo menos 3 pessoas são inimigas de A pode ser analisado analogamente ao caso acima. □

Permutações e combinações

Permutações e combinações: Introdução

- Muitos problemas de contagem envolvem encontrar o número de maneiras em que objetos podem ser arranjados levando em consideração se a ordem destes objetos importa ou não dentro do arranjo.
- **Permutações** são os casos em que a ordem dos elementos importa dentro do arranjo.
- **Combinações** são os casos em que ordem dos elementos não importa dentro do arranjo.

Permutações

- Uma **permutação** de um conjunto é um arranjo ordenado dos elementos deste conjunto.

Uma **r -permutação** de um conjunto é um arranjo ordenado de r elementos deste conjunto.

- **Exemplo 19:** Seja $S = \{a, b, c\}$.

- As permutações de S são os 6 arranjos seguintes:

(a, b, c) , (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , e (c, b, a) .

- As 2-permutações de S são os 6 arranjos seguintes:

(a, b) , (a, c) , (b, a) , (b, c) , (c, a) , e (c, b) .

- As 1-permutações de S são os 3 arranjos seguintes:

(a) , (b) , e (c) .



Fórmula para permutações

- **Teorema:** O número de r -permutações de um conjunto de n elementos é dado por

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ = \frac{n!}{(n-r)!},$$

onde n é um inteiro positivo e r é um inteiro tal que $1 \leq r \leq n$.

Prova. Vamos quebrar a operação de escolher uma r -permutação em r etapas, uma para cada elemento a ser escolhido na permutação.

Para a primeira posição da permutação há n possibilidades (qualquer elemento do conjunto). Para a segunda posição da permutação há $n-1$ possibilidades (qualquer elemento do conjunto menos o que já foi usado na primeira posição). Similarmente, há $n-2$ possibilidades para a terceira posição da permutação (qualquer elemento do conjunto menos os dois que já foram usados nas duas primeiras posições), e assim sucessivamente, até que restem $n-(r-1) = n-r+1$ possibilidades para a r -ésima posição da permutação.

Fórmula para permutações

- **Prova.** (Continuação)

Aplicando a regra do produto, temos um total de

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$$

r -permutações do conjunto de n elementos.

Para finalizar, observe que se multiplicarmos o lado direito da igualdade por $(n-r)!/(n-r)!$ obtemos

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

□

Permutações

- **Exemplo 20:** Um estudante tem

- 4 livros de sistemas operacionais,
- 7 livros de programação, e
- 3 livros de estruturas de dados.

De quantas formas diferentes os livros podem ser colocados na prateleira de uma estante, dado que livros de um mesmo assunto devem ficar juntos?

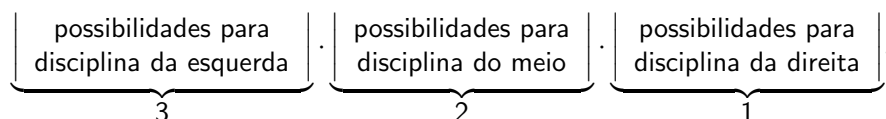
Solução: Observe que:

- A ordem de ocorrência das disciplinas dos livros na estante é importante.
- Dentro de cada disciplina, a ordem dos livros também é importante.
- O problema pode ser dividido em duas partes: número de ordenações das disciplinas e, dentro de cada disciplina, ordenação dos livros.

Permutações

- **Exemplo 20:** (Continuação)

As possibilidades de ordenações das disciplinas são



o que dá um total de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Dentro de cada disciplina, podemos organizar os livros assim:

- Sistemas operacionais (4 livros): $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ possibilidades,
- Programação (7 livros): $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$ possibilidades,
- Estruturas de dados (3 livros): $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ possibilidades.

Assim, existem

$$6 \cdot (4! \cdot 7! \cdot 3!) = 4\,354\,560$$

maneiras de se colocarem os livros na estante.

◀

Permutações

- **Exemplo 21:** De quantas formas diferentes as letras da palavra COMPUTER podem ser arranjadas numa sequência?

Solução: Todas as letras na palavra COMPUTER são distintas. Assim, o número de formas distintas de arrancar as letras é o número de permutações de um conjunto de oito elementos, ou seja, $8! = 40\,320$.

◀

Permutações

- Exemplo 22: De quantas formas diferentes as letras da palavra COMPUTER podem ser arranjadas se as letras CO devem permanecer unidas nesta ordem?

Solução: Se as letras CO devem permanecer unidas existem efetivamente sete objetos a serem arranjados. Assim, o número de permutações é $7! = 5\,040$.

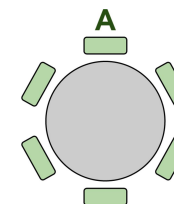


Permutações

- Exemplo 23: Seis pessoas devem se sentar em torno de uma mesa circular.

Se apenas as posições relativas entre pessoas importam (ou seja, rotações da mesma configuração são consideradas equivalentes), de quantas formas diferentes essas pessoas podem se sentar?

Solução: Identifique as pessoas como A, B, C, D, E e F . Como apenas posições relativas importam, podemos começar com A e considerar todos as permutações das outras pessoas em relação a A .



As pessoas B a F podem se sentar em volta de A de todas as formas possíveis. Assim, existem $5! = 120$ formas de arrumar o grupo.



Combinações

- Uma r -**combinação** de um conjunto é um arranjo não-ordenado de r elementos deste conjunto.

Em outras palavras, uma r -combinação de um conjunto é um subconjunto de tamanho r deste conjunto.

- Exemplo 24: Seja $S = \{a, b, c, d\}$.

- As 1-combinações de S são os 4 arranjos seguintes:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \text{ e } \{d\}.$$

- As 2-combinações de S são os 6 arranjos seguintes:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \text{ e } \{c, d\}.$$

- As 3-combinações de S são os 4 arranjos seguintes:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \text{ e } \{b, c, d\}.$$

- A única 4-combinação de S é o arranjo seguinte:

$$\{a, b, c, d\}.$$

Fórmula para combinações

- Teorema:** O número de r -combinações de um conjunto de n elementos é dado por

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

onde n é um inteiro positivo e r é um inteiro tal que $1 \leq r \leq n$.

Prova. Vamos obter a fórmula para $C(n, r)$ a partir da fórmula para $P(n, r)$.

Note que a operação de escolher uma r -permutação de um conjunto pode ser quebrada assim: primeiro escolhe-se um subconjunto r elementos (ou seja, uma r -combinação deste conjunto), depois escolhe-se a ordem destes r elementos (ou seja, escolhe-se uma r -permutação do subconjunto tomado).

Como há $C(n, r)$ maneiras de se escolher um subconjunto de tamanho r , e há $P(r, r)$ maneiras de se permutar os elementos do subconjunto escolhido, pela regra da multiplicação temos que $P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$, e portanto

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



Fórmula para combinações

- Seja um conjunto S de tamanho n .

Note que a cada subconjunto de tamanho r corresponde exatamente um subconjunto de tamanho $n - r$: o subconjunto formado pelos elementos não escolhidos.

Esta observação leva à seguinte igualdade sobre r combinações:

- Teorema:** Se n, r são inteiros não negativos com $r \leq n$, então $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Prova.

$$\begin{aligned} C(n, n - r) &= \frac{n!}{(n - r)!(n - (n - r))!} && \text{(pela def. de combinação)} \\ &= \frac{n!}{(n - r)!r!} \\ &= C(n, r) && \text{(pela def. de combinação)} \end{aligned}$$

□

Combinações

- Exemplo 25:** Quantas mãos diferentes de 5 cartas podem ser retiradas a partir de um baralho?

Solução: Já que a ordem em que retiramos as cartas do baralho não importa, o problema se resume a escolher um subconjunto de tamanho 5 a partir de um conjunto de tamanho 52.

Ou seja, queremos encontrar quantas 5-permutações existem em um conjunto de 52 elementos. Pela fórmula, há

$$\begin{aligned} C(52, 5) &= \frac{52!}{5!47!} \\ &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 47!} \\ &= 2\,598\,960 \end{aligned}$$

maneiras de se fazer isto.

◀

Combinações

- Exemplo 26:** No jogo da Mega Sena, o apostador pode escolher uma certa quantidade de números dentro do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 60\}$.

Quantas apostas distintas existem se o apostador deve escolher exatamente 6 números?

Solução: Como a ordem em que os números são sorteados não é relevante, temos que contar quantas 6-combinações existem em um conjunto de 60 elementos.

Logo, pela fórmula, há

$$\begin{aligned} C(60, 6) &= \frac{60!}{6!54!} \\ &= \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 54!} \\ &= 50\,063\,860 \end{aligned}$$

apostas distintas.

◀

Combinações

- Exemplo 27:** Suponha queiramos formar um times de 5 pessoas a partir de um grupo de 12 pessoas. Porém, duas pessoas desse grupo insistem em trabalhar conjuntamente. Assim, ao se formar um time, ou as duas pessoas estão presentes ou não.

De quantas maneiras podemos formar o time?

Solução: Chamemos de A e B as duas pessoas que só estão presentes se em conjunto.

Pelo princípio da adição, o número total de times que podem ser formados é dado por

$$\left| \begin{array}{l} \text{times que podem} \\ \text{ser formados} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{times que contêm} \\ A \text{ e } B \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \text{times que não contêm} \\ \text{nem } A \text{ nem } B \end{array} \right|.$$

Combinações

- Exemplo 27: (Continuação)

Daí podemos calcular:

- Times que contêm A e B : fixamos que A e B já estão necessariamente no time e escolhemos 3 membros para completar o time dentre as 10 pessoas restantes. Logo, há $C(10, 3) = \frac{10!}{3!7!} = 120$ possibilidades nesse caso.
- Times que não contêm nem A nem B : escolhemos 5 membros para o time dentre as 10 pessoas disponíveis (já que A e B não podem estar no time). Logo, há $C(10, 5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$ possibilidades nesse caso.

Assim, o total de times possíveis é $120 + 252 = 372$.



Combinações

- Exemplo 28: Suponha um cenário similar ao anterior, em que queiramos formar um times de 5 pessoas a partir de um grupo de 12 pessoas.

Porém agora duas destas pessoas não podem trabalhar conjuntamente, ou seja, o time não pode conter estas duas pessoas ao mesmo tempo.

Quantos times podem ser formados nesse caso?

Solução: Chamemos de A e B as duas pessoas que não trabalham juntas.

Pelo princípio da adição, o número total de times que podem ser formados é

$$\left| \begin{array}{c} \text{times que contêm} \\ A \text{ mas não } B \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{times que contêm} \\ B \text{ mas não } A \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{times que não contêm} \\ \text{nem } A \text{ nem } B \end{array} \right|.$$

Combinações

- Exemplo 28: (Continuação)

Daí podemos calcular:

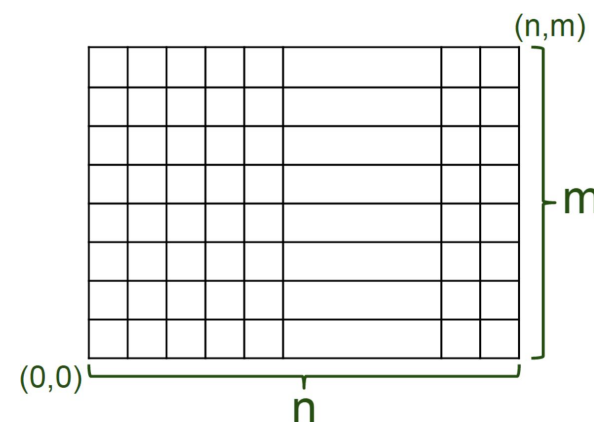
- Times que contêm A mas não B : fixamos que A já está necessariamente no time e escolhemos 4 membros para completar o time dentre as 10 pessoas restantes (já que B não está disponível). Logo, há $C(10, 4) = \frac{10!}{4!6!} = 210$ possibilidades nesse caso.
- Times que contêm B mas não A : raciocínio análogo ao do item anterior. Logo, há $C(10, 4) = \frac{10!}{4!6!} = 210$ possibilidades nesse caso.
- Times que não contêm nem A nem B : escolhemos 5 membros para o time dentre as 10 pessoas disponíveis (já que A e B não podem estar no time). Logo, há $C(10, 5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$ possibilidades nesse caso.

Assim, o total de times possíveis é $210 + 210 + 252 = 672$.



Combinações

- Exemplo 29: Seja um grid de tamanho $n \times m$.



Quantos caminhos existem entre a posição $(0,0)$ (canto inferior esquerdo) até a posição (n,m) (canto superior direito) se os únicos movimentos possíveis são mover para a direita (D) ou para cima (C)?

Combinações

- Exemplo 29: (Continuação)

Solução: Cada rota pode ser expressa por uma sequência de D's e C's onde

- a sequência tem que ter exatamente m C's, já que toda a extensão vertical do grid deve ser coberta, e
- a sequência tem que ter exatamente n D's, já que toda a extensão horizontal do grid deve ser coberta.

Assim, para formar uma rota basta escolher dentre $m + n$ posições possíveis na string um subconjunto de m posições onde ocorrerão os C's.

Portanto, a resposta do problema é o número de m -permutações de um conjunto de $m + n$ elementos, o que é dado por

$$C(m + n, m) = \frac{(m + n)!}{m!n!}.$$

(Se escolhêssemos n posições para os D's, a resposta seria igual. Por quê?) ◀

Coeficientes binomiais

Coeficientes binomiais

- As r -combinações de um conjunto de n elementos, denotadas por $C(n, r)$, aparecem naturalmente na expansão de **expressões binomiais** da forma $(a + b)^n$.
- Por causa disto, $C(n, r)$ é também chamado de **coeficiente binomial** e denotado por $\binom{n}{r}$.
- Nesta seção vamos estudar coeficientes binomiais e o Triângulo de Pascal.

Coeficientes binomiais

- Exemplo 30: Vamos expandir o binômio $(x + y)^3$.

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\ &= (xx + xy + yx + yy)(x + y) \\ &= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy \\ &= (xxx) + (xxy + xyx + yxx) + (xyy + yxy + yyx) + (yyy) \\ &= C(3, 0) \cdot x^3 + C(3, 1) \cdot x^2y + C(3, 2) \cdot xy^2 + C(3, 3) \cdot y^3 \\ &= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 \\ &= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i}x^{3-i}y^i\end{aligned}$$

Coeficientes binomiais

- Exemplo 30: (Continuação)

Observe que, na expansão de $(x + y)^3$:

- A multiplicação $(x + y)(x + y)(x + y)$ produz uma soma de várias parcelas. Cada parcela é o produto de três símbolos x e/ou y , e cada símbolo provém de um dos termos $(x + y)$.
- As parcelas podem ser agrupadas em três tipos: x^3 , x^2y , xy^2 ou y^3 . Há várias maneiras de se gerar cada tipo de parcela.

Por exemplo, uma parcela do tipo x^2y pode ser gerada como:

- xyx : o terceiro termo $(x + y)$ contribui com um y , os demais, com um x ;
- xyx : o segundo termo $(x + y)$ contribui com um y , os demais, com um x ;
- yxx : o primeiro termo $(x + y)$ contribui com um y , os demais, com um x .

Logo, o termo x^2y pode ser formado de $C(3, 2) = C(3, 1) = 3$ maneiras.

Generalizando as observações acima: cada parcela do tipo $x^i y^{3-i}$ pode ser formada de $C(3, i) = C(3, 3 - i)$ maneiras distintas.



O Teorema Binomial

- As observações do exemplo anterior podem ser usadas para se mostrar o seguinte resultado.
- Teorema: (Teorema Binomial)** Sejam x, y variáveis e n um inteiro. Então:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$
$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

O Teorema Binomial

- Exemplo 31: Expanda $(x + y)^4$ usando o Teorema Binomial.

Solução:

$$(x + y)^4 = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i}x^{4-i}y^i$$
$$= \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$



O Teorema Binomial

- Exemplo 32: Qual é o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ na expansão de $(2x - 3y)^{25}$?

Solução: Primeiro vamos escrever $(2x - 3y)^{25}$ na forma de binômio: $(2x + (-3y))^{25}$.

Pelo teorema binomial,

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum_{i=0}^{25} \binom{25}{i}(2x)^{25-i}(-3y)^i,$$

e, logo, o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ é obtido quando $i = 13$.

Assim, o coeficiente do termo em questão é

$$\binom{25}{13}(2)^{25-13}(-3)^{13} = \binom{25}{13}(2)^{12}(-3)^{13}$$
$$= \frac{25!}{13!12!}2^{12}(-3)^{13}.$$



O Teorema Binomial

- Exemplo 33:** Use o Teorema Binomial para mostrar que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Prova. Podemos usar o Teorema Binomial com $x = 1$ e $y = 1$ e escrever:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1 + 1)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k && \text{(Pelo Teorema Binomial)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \end{aligned}$$

□

O Teorema Binomial

- Exemplo 34:** Desafio: Como podemos usar o resultado do exemplo anterior ($\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$) para mostrar que um conjunto de n elementos tem 2^n subconjuntos?

Solução: Note que, se um conjunto S possui n elementos, S possui $C(n, k) = \binom{n}{k}$ subconjuntos de tamanho k .

O número total de subconjuntos de S é a soma do número de subconjuntos tendo de $k = 0$ a $k = n$ elementos.

Ou seja, o número de elementos do conjunto potência $\mathcal{P}(S)$ é dado por

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(S)| &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= 2^n, && \text{(pelo resultado do exemplo anterior)} \end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos mostrar.

◀

A Identidade de Pascal

- Teorema: (Identidade de Pascal)** Se n, k são inteiros positivos com $k \leq n$, então

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Prova. Seja S um conjunto de $n + 1$ elementos, e fixe um elemento a deste conjunto. Seja R o conjunto de todos os subconjuntos de S contendo r elementos. Usando a fórmula para r -combinações, sabemos que $|R| = \binom{n+1}{r}$.

Note que R pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos: R_a , contendo todos os subconjuntos em que o elemento a está presente, e R_- , contendo todos os subconjuntos em que a não está presente. Podemos calcular:

- $|R_a| = \binom{n}{r-1}$: já que para formar um subconjunto que necessariamente contém a , temos que escolher $r - 1$ elementos de um total de n disponíveis.
- $|R_-| = \binom{n}{r}$: já que para formar um subconjunto que necessariamente não contém a , temos que escolher r elementos de um total de n disponíveis.

Logo, como $|R| = |R_a| + |R_-|$, temos que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. □

O Triângulo de Pascal

- O **Triângulo de Pascal** fornece uma maneira muito prática de se calcularem os coeficientes binomiais, baseada na **Identidade de Pascal**:

No Triângulo de Pascal, cada entrada é a soma das duas entradas diagonalmente acima delas: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

$\binom{0}{0}$		1
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$		1 1
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$		1 2 1
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	Pela identidade de Pascal:	1 3 3 1
	$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{3}$	
$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$		1 4 6 4 1
$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$		1 5 10 10 5 1
$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$		1 6 15 20 15 6 1
$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$		1 7 21 35 35 21 7 1
$\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$		1 8 28 56 70 56 28 8 1
...		...

Permutações e combinações generalizadas

Permutações e combinações generalizadas: Introdução

- Até agora estudamos o arranjo de objetos em situações em que
 - 1 todos os objetos eram distintos, e
 - 2 nenhum objeto poderia ser utilizado mais de uma vez.
- Nesta seção vamos relaxar estas restrições, encontrando formas de calcular r -permutações e r -combinações quando objetos puderem ser repetidos e/ou reutilizados.

Permutações com repetição

- **Exemplo 35:** Quantas strings de tamanho r podem ser formadas usando-se as 26 letras maiúsculas do alfabeto?

Solução: Temos que escolher uma letra para cada uma das r posições da string.

Há 26 opções de letra para cada posição (note que uma string pode conter várias vezes a mesma letra).

Logo, pela regra da multiplicação, há

$$\underbrace{26 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 26}_{r \text{ vezes}} = 26^r$$

strings de tamanho r usando-se apenas 26 letras maiúsculas.



Permutações com repetição

- A resolução do exemplo anterior pode ser generalizada para qualquer caso de r -permutação com repetição.
- **Teorema:** O número de r -permutações com repetição de um conjunto de n elementos é n^r .

Prova. Uso trivial da regra da multiplicação: Temos que escolher r elementos, e para cada elemento há n possibilidades. Logo, pela regra da multiplicação, o número total de possibilidades é

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ vezes}} = n^r.$$



Combinações com repetição

- Exemplo 36: Um caixa eletrônico provê notas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 reais. Quantas combinações de notas diferentes podem ser retiradas do caixa eletrônico se retirarmos exatamente 5 notas (podendo haver notas repetidas)?

Solução: Podemos transformar cada possível seleção de notas num string em que:

- há um símbolo * para cada nota a ser usada, e
- há um símbolo | para indicar a separação de cada tipo de nota.

Por exemplo, a quantia formada por uma nota de 2, duas notas de 5, uma nota de 20 e uma nota de 100 pode ser representada como

1\$		2\$		5\$		10\$		20\$		50\$		100\$
		*		**				*				*

Combinações com repetição

- Exemplo 36: (Continuação)

Note que, para representar cada escolha de 5 notas dentre os 7 tipos de notas disponíveis, podemos usar uma string que contém

- 5 símbolos * (um para cada nota) e
- 6 símbolos | (para separar as 7 categorias de notas).

Logo, cada escolha de notas pode ser representada por uma string de tamanho $5 + 7 - 1 = 11$, e a resolução do problema se reduz a responder à seguinte questão:

*“No alfabeto com símbolos | e *, quantas string de tamanho 11 com 5 símbolos * podemos formar?”*

Este é um problema de r -combinação, em que $n = 11$ e $r = 5$. Logo a solução é

$$C(11, 5)$$



Combinações com repetição

- A resolução do exemplo anterior pode ser generalizada como se segue.
- Teorema:** O número de r -combinações com repetição de um conjunto de n elementos é $C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$.

Prova. Cada r -combinação com repetição de um conjunto de n elementos pode ser representada como uma string de $n - 1$ símbolos | (para formar as casinhas representando cada um dos n tipos de elementos) e r símbolos * (um para cada elemento a ser escolhido).

Assim, cada solução pode ser representada por uma string de símbolos | e * de tamanho total $n + r - 1$.

O número total de soluções é dado pelas formas possíveis de formar esta string escolhendo-se r posições para os símbolos *, (e deixando as demais $n - 1$ posições para os símbolos |). Este é um problema de r -combinação com solução $C(n + r - 1, r)$.

Note que a solução é igual se decidirmos montar a string escolhendo $n - 1$ posições para os símbolos |, pois obtemos $C(n + r - 1, n - 1)$ possibilidades no total. \square

Combinações com repetição

- Exemplo 37: Quantas soluções inteiras tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11, \quad \text{onde } x_1, x_2, x_3 \geq 0?$$

Solução: Cada solução inteira desta equação pode ser vista como uma distribuição de $r = 11$ unidades entre $n = 3$ categorias (x_1, x_2, x_3) .

Isto significa que queremos contar o número de r -combinações com repetição de um conjunto de $n = 3$ elementos (x_1, x_2, x_3) .

Logo, a solução é dada por

$$C(n + r - 1, r) = C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11).$$



Combinações com repetição

- Exemplo 38: Quantas soluções inteiras tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11, \quad \text{onde } x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2?$$

Solução: Como no exemplo anterior, podemos modelar este problema como uma r -combinação com repetição, onde temos que selecionar 11 elementos de um conjunto de 3 tipos de elementos (x_1, x_2, x_3) .

Porém, neste caso há as restrições de que $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 2$. Podemos modelar estas restrições ao selecionarmos de antemão que 1 objeto deve ser do tipo x_2 e 2 objetos devem ser do tipo x_3 .

Assim, a solução final consiste em contar de quantas formas podemos selecionar $r = 11 - 1 - 2 = 8$ objetos de um conjunto de $n = 3$ elementos, e a resposta é

$$C(n + r - 1, r) = C(3 + 8 - 1, 8) = C(10, 8).$$



Permutações com objetos indistinguíveis

- Exemplo 39: Quantas permutações distintas existem das letras de SUCCESS?

Solução: A palavra SUCCESS tem 7 letras, e a princípio poderíamos pensar que o total de permutações de suas letras seria $P(7, 7) = 7! = 5040$. Entretanto, note que nem todas as letras da palavra são únicas:

- há 3 ocorrências de S,
- há 2 ocorrências de C, e
- há 1 ocorrência de U,
- há 1 ocorrência de E.

Temos que descontar do total de permutações das letras aquelas permutações em que letras iguais trocam de posição entre si, pois tais permutações são indistinguíveis na palavra final formada. Como há 3 letras S, elas podem permutar entre si de $P(3, 3) = 3! = 6$ maneiras diferentes. Já as 2 letras C podem permutar entre si de $P(2, 2) = 2! = 2$ maneiras. Por fim, as letras U e E ocorrem uma única vez, e portanto há apenas $P(1, 1) = 1! = 1$ uma maneira de se organizar cada uma. Logo, as permutações distintas da palavra SUCCESS são $7! / (3!2!1!1!) = 420$.



Permutações com objetos indistinguíveis

- A resolução do exemplo anterior pode ser generalizada para qualquer caso de permutação com objetos indistinguíveis.

- Teorema:** Seja uma coleção de n objetos, em que há

- n_1 objetos indistinguíveis do tipo 1,
- n_2 objetos indistinguíveis do tipo 2,
- ...
- n_k objetos indistinguíveis do tipo k .

Então o número de permutações distintas neste conjunto é

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Permutações com objetos indistinguíveis

- Prova.** Cada permutação pode ser obtida seguindo as etapas:

- escolher n_1 posições para objetos do tipo 1 entre as n posições possíveis: há $C(n, n_1)$ maneiras de se fazer isto;
- escolher n_2 posições para objetos do tipo 2 entre as $n - n_1$ posições possíveis restantes: há $C(n - n_1, n_2)$ maneiras de se fazer isto;
- ...
- escolher n_k posições para objetos do tipo k entre as $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}$ posições possíveis restantes: há $C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$ maneiras de se fazer isto.

Pela regra do produto, o total de maneiras para se realizarem estas etapas é:

$$\begin{aligned} & C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdots C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k) \\ &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdots \frac{(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1})!}{n_k!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \end{aligned}$$



Permutações e combinações: Sumário

Nº arranjos de r elementos; conjunto de n	Ordem dos elementos não importa	Ordem dos elementos importa
Elementos não podem se repetir	r -combinação: $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	r -permutação: $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
Elementos podem se repetir	r -combinação com repetição: $C(n+r-1, r)$	r -permutação com repetição: n^r