

Relações

Mário S. Alvim
(msalvim@dcc.ufmg.br)

Matemática Discreta

DCC-UFMG
(2016/02)

Relações

Relações: Introdução

- Elementos de conjuntos podem estar relacionados em diversos contextos.
- No mundo real, por exemplo:
 - 1 cada disciplina da UFMG está relacionada ao horário em que ela é ofertada;
 - 2 cada aluno de uma disciplina está relacionado a sua nota na disciplina;
 - 3 cada número de telefone está relacionado à pessoa que o possui...
- Na matemática, por exemplo:
 - 1 cada número x está relacionado a um número $f(x)$, se f for uma função;
 - 2 cada inteiro está relacionado a inteiros que o dividem;
 - 3 cada fração está relacionada à sua forma irredutível...
- Aqui estudaremos as relações entre elementos de conjuntos, suas representações, suas propriedades e suas aplicações.

Relações em conjuntos

- Um relacionamento entre objetos pode ser representado através de uma **relação**, que é um subconjunto do produto cartesiano de conjuntos.
- Relações podem envolver diversos conjuntos, mas por enquanto vamos nos focar em **relações binárias**, que envolvem apenas dois conjuntos.

Relações em conjuntos

- Sejam A e B dois conjuntos. Uma **relação binária de A para B** é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Formalmente:

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Em outras palavras, uma relação de A para B é um conjunto R de pares ordenados em que o primeiro elemento de cada par é um elemento de A , e o segundo elemento do par é um elemento de B .

- Quando $(a, b) \in R$, dizemos que a **está relacionado a b via R** .
 - $a R b$ representa $(a, b) \in R$,
 - $a \not R b$ representa $(a, b) \notin R$.

Relações em conjuntos

- Exemplo 1:** Seja A o conjunto de alunos da UFMG, e B o conjunto de disciplinas oferecidas pelo DCC.

Seja R a relação consistindo nos pares (a, b) tais que o aluno a está matriculado na disciplina b .

Então:

- Se Aline e Bruno estão matriculados na disciplina DCC-111, temos que o par (Aline, DCC-111) pertence à relação R , e o par (Bruno, DCC-111) também pertence a R .
- Se Aline também está matriculada na disciplina DCC-004, então também o par (Aline, DCC-004) pertence a R .
- Se Bruno não está matriculado na disciplina DCC-129, então o par (Bruno, DCC-129) não pertence a R .



Relações em conjuntos

- Exemplo 2:** Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Suponha que um elemento a em A esteja relacionado com um elemento b em B através da relação R sse a é menor do que b .

Assim temos que:

- $0 R 1$ porque 0 é menor que 1,
- $0 R 2$ porque 0 é menor que 2,
- $0 R 3$ porque 0 é menor que 3,
- $1 R 2$ porque 1 é menor que 2,
- $1 R 3$ porque 1 é menor que 3,
- $2 R 3$ porque 2 é menor que 3.
- $1 \not R 1$ porque 1 não é menor que 1,
- $2 \not R 1$ porque 2 não é menor que 1,
- $2 \not R 2$ porque 2 não é menor que 2.

Neste exemplo, R é o nome da relação que usualmente chamamos de $<$:

- $a R b$ equivale a $a < b$
- $(a, b) \in R$ equivale a $(a, b) \in <$.

Relações em conjuntos

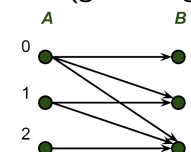
- Exemplo 2:** (Continuação)

Podemos também representar a relação R de várias formas alternativas:

- através de um **conjunto de pares ordenados** retirado de $A \times B$:

$$R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\},$$

- através de um **diagrama de setas (grafo dirigido ou digrafo)**:



- através de uma **tabela** ou de uma **matriz booleana**:

R	1	2	3
0	×	×	×
1		×	×
2			×

$$\begin{matrix} & (1) & (2) & (3) \\ \begin{matrix} (0) \\ (1) \\ (2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Funções como relações

- Funções são um caso especial de relações entre conjuntos.
- Uma função f de um conjunto A para um conjunto B é uma relação binária de A para B satisfazendo as seguintes restrições:

1 todo elemento $a \in A$ faz parte de pelo menos um par da relação:

$$\forall a \in A : \exists b \in B : (a, b) \in f$$

2 cada elemento $a \in A$ faz parte de no máximo um par da relação:

$$\forall a \in A : \forall b, b' \in B : (a, b) \in f \wedge (a, b') \in f \rightarrow (b = b')$$

Funções como relações

- **Exemplo 3:** Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e seja a função $f : A \rightarrow B$ definida como $f(a) = a + 1$.

Esta função pode ser representada como a relação f de A para B abaixo:

$$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$



Relações em um conjunto

- Relações de um conjunto para si mesmo são de interesse especial.
- Uma **relação no conjunto** A é uma relação de A para A .

Relações em um conjunto

- **Exemplo 4:** Sejam as seguintes relações no conjunto \mathbb{Z} :

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$

Quais destas relações contêm os pares:

	$(-1, -1)$	$(2, 1)$	$(0, 0)$	$(0, -4)$
R_1	SIM	-	SIM	-
R_2	SIM	-	-	-
R_3	-	SIM	-	-



Propriedades de relações

Propriedades de relações: Introdução

- Existem várias propriedades que uma relação pode satisfazer.
- Por exemplo, vimos que relações binárias que representam funções satisfazem a propriedade de que cada elemento do domínio da função faz parte de exatamente um par da relação.
- Aqui vamos nos concentrar em algumas das propriedades mais relevantes que relações podem apresentar:
 - reflexividade;
 - simetria;
 - antissimetria;
 - transitividade.

Propriedades de relações: Reflexividade

- Uma relação binária R em um conjunto A é **reflexiva** sse cada elemento se relaciona consigo mesmo:

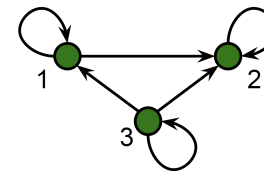
$$\forall a \in A : (a, a) \in R.$$

Propriedades de relações: Reflexividade

- **Exemplo 5:** A relação R abaixo sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é reflexiva:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Representando R como grafo e como matriz:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que todos os vértices têm um *loop* (uma aresta de si para si).

Note que todos os elementos na diagonal da matriz são 1s.



Propriedades de relações: Reflexividade

- Exemplo 6: Seja H o conjunto dos seres humanos.

Diga se cada uma das seguintes relações em H é reflexiva:

- $(a, b) \in R_1$ sse a tem o mesmo pai e a mesma mãe de b .

Solução: R_1 é reflexiva, pois todo mundo é filho do mesmo pai e da mesma mãe que si mesmo.

- $(a, b) \in R_2$ sse a é irmão de b .

Solução: R_2 não é reflexiva, pois ninguém é irmão de si mesmo.

- $(a, b) \in R_3$ sse a é pai de b .

Solução: R_3 não é reflexiva, pois ninguém é pai de si mesmo.



Propriedades de relações: Simetria

- Uma relação binária R em um conjunto A é **simétrica** sse, para cada elemento que se relaciona com um segundo, também este segundo elemento se relaciona com o primeiro:

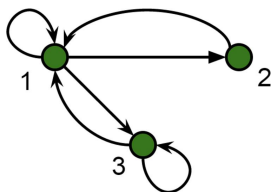
$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$$

Propriedades de relações: Simetria

- Exemplo 7: A relação R abaixo sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é simétrica:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 3)\}.$$

Representando R como grafo e como matriz:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que para cada seta “de ida” há uma seta “de volta”.

Note que a matriz é simétrica ($m_{i,j} = m_{j,i}$ para todo i, j).



Propriedades de relações: Simetria

- Exemplo 8: Seja H o conjunto dos seres humanos.

Diga se cada uma das seguintes relações em H é simétrica:

- $(a, b) \in R_1$ sse a tem o mesmo pai e a mesma mãe de b .

Solução: R_1 é simétrica, pois se uma pessoa a tem o mesmo pai e a mesma mãe que uma pessoa b , então a pessoa b tem o mesmo pai e a mesma mãe que a pessoa a .

- $(a, b) \in R_2$ sse a é irmão de b .

Solução: R_2 é simétrica, pois sempre que uma pessoa a é irmã de uma pessoa b , a pessoa b é irmã da pessoa a .

- $(a, b) \in R_3$ sse a é pai de b .

Solução: R_3 não é simétrica, se uma pessoa a é pai de uma pessoa b , a pessoa b não pode ser pai da pessoa a .



Propriedades de relações: Antissimetria

- Uma relação binária R em um conjunto A é **antissimétrica** sse, para cada elemento que se relaciona com um segundo, este segundo elemento só se relaciona com o primeiro se eles forem iguais:

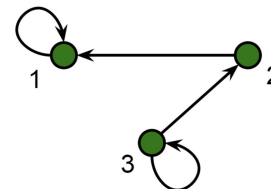
$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b.$$

Propriedades de relações: Antissimetria

- Exemplo 9:** A relação R abaixo sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é antissimétrica:

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Representando R como grafo e como matriz:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que entre dois vértices quaisquer nunca há, ao mesmo tempo, setas “de ida” e “de volta”.

Note que elementos opostos em relação à diagonal não podem ser ambos 1 ($m_{i,j} = 1 \rightarrow m_{j,i} \neq 1$ para todo $i \neq j$).



Propriedades de relações: Antissimetria

- Exemplo 10:** Seja H o conjunto dos seres humanos.

Diga se cada uma das seguintes relações em H é antissimétrica:

- $(a, b) \in R_1$ sse a é irmão de b .

Solução: R_1 não é antissimétrica, pois há pessoas distintas a e b tais que a é irmão de b , e b é irmão de a .

- $(a, b) \in R_2$ sse a tem o mesmo CPF que b .

Solução: R_2 é antissimétrica, pois sempre que uma pessoa a tem o mesmo CPF que b , e b tem o mesmo CPF que a , é porque a e b são a mesma pessoa.

- $(a, b) \in R_3$ sse a é pai de b .

Solução: R_3 é antissimétrica, pois se uma pessoa a é pai de uma pessoa b , a pessoa b não pode ser pai da pessoa a .



Propriedades de relações: Transitividade

- Uma relação binária R em um conjunto A é **transitiva** sse, para cada elemento relacionado com um segundo, se o segundo é relacionado com um terceiro, então o primeiro é relacionado com o terceiro:

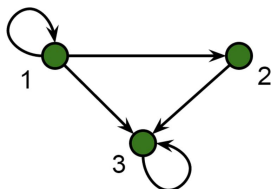
$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R.$$

Propriedades de relações: Transitividade

- Exemplo 11: A relação R abaixo sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é transitiva:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}.$$

Representando R como grafo e como matriz:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que sempre que há um caminho indireto entre dois vértices, há também um caminho direto.



Propriedades de relações: Transitividade

- Exemplo 12: Seja H o conjunto dos seres humanos.

Diga se cada uma das seguintes relações em H é transitiva:

- $(a, b) \in R_1$ sse a tem o mesmo pai e a mesma mãe que b .

Solução: R_1 é transitiva, porque se uma pessoa a tem o mesmo pai e mãe que uma pessoa b , e a pessoa b tem o mesmo pai e mãe que a pessoa c , então a e c também têm o mesmo pai e mãe.

- $(a, b) \in R_2$ sse a é irmão de b .

Solução: R_2 não é transitiva, pois há pessoas a , b e c tais que $a R_2 b$ por parte de pai, $b R_2 c$ por parte de mãe, mas $a \not R_2 c$ porque não têm nem pai nem mãe em comum.

- $(a, b) \in R_3$ sse a é ancestral de b .

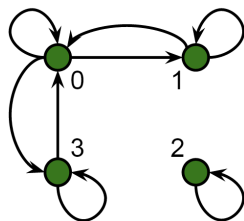
Solução: R_3 é transitiva, pois se uma pessoa a ancestral de b , e b é ancestral de c , então a é necessariamente ancestral de c .



Verificando propriedades de relações

- Exemplo 13: Seja a seguinte relação binária definida em $A = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$$



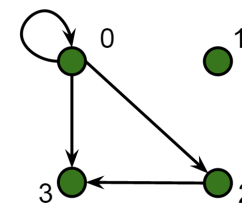
- R é reflexiva? **Sim:** existe um *loop* em cada nó do grafo, o que significa que cada elemento de A é relacionado consigo mesmo.
- R é simétrica? **Sim:** para cada aresta “de ida” existe uma aresta “de volta”.
- R é antissimétrica? **Não:** $(0, 1) \in R$ e $(1, 0) \in R$, mas $0 \neq 1$.
- R é transitiva? **Não:** temos $(1, 0) \in R$ e $(0, 3) \in R$, mas $(1, 3) \notin R$.



Verificando propriedades de relações

- Exemplo 14: Seja a seguinte relação binária definida em $A = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$S = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\}$$



- S é reflexiva? **Não:** existem elementos que não se relacionam a si mesmos, por exemplo $(1, 1) \notin R$.
- S é simétrica? **Não:** nem toda aresta “de ida” tem uma aresta “de volta”.
- S é antissimétrica? **Sim:** não há nenhuma aresta “de ida” e “de volta” para elementos distintos.

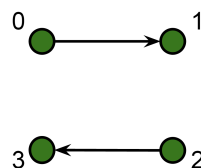
- S é transitiva? **Sim:**

$(a, b) \wedge (b, c)$	$(a, c)?$	
$(0, 2)$ e $(2, 3)$	$(0, 3)$	(Os elementos a , b e c não precisam ser distintos.)
$(0, 0)$ e $(0, 2)$	$(0, 2)$	
$(0, 0)$ e $(0, 3)$	$(0, 3)$	



Verificando propriedades de relações

- Exemplo 15: Seja a seguinte relação binária definida em $A = \{0, 1, 2, 3\}$:



$$T = \{(0, 1), (2, 3)\}$$

- T é reflexiva? Não: existem elementos que não se relacionam a si mesmos, por exemplo $(0, 0) \notin R$.
- T é simétrica? Não: nem toda aresta “de ida” tem uma aresta “de volta”.
- T é antissimétrica? Sim: não há nenhuma aresta “de ida” e “de volta” para elementos distintos.
- T é transitiva? Sim: A transitividade é violada sse houver $a, b, c \in A$ tais que

$$(a, b) \in T \wedge (b, c) \in T \wedge (a, c) \notin T.$$

Como não há elementos tais $a, b, c \in A$, a relação T é transitiva.



Verificando propriedades de relações

- Às vezes precisamos provar que uma propriedade vale para uma relação definida em um conjunto infinito.
- Seja R uma relação binária é definida em um conjunto infinito A . Para provar que a R satisfaz uma certa propriedade, devemos:

- Escrever claramente o que deve ser provado.

Por exemplo, para simetria, devemos escrever que queremos provar que

$$\forall a, b \in A : \text{ se } a R b \text{ então } b R a.$$

- Usar as definições do conjunto A e da relação R para reescrever a propriedade.

Por exemplo, para a relação de igualdade no conjunto de números reais, mostramos que

$$\forall a, b \in A : \text{ se } a = b \text{ então } b = a,$$

logo a relação de igualdade é simétrica.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 16: Seja S uma relação no conjunto \mathbb{R} dos números reais tal que para todos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x S y \text{ sse } x < y.$$

Mostre se a relação S é reflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 16: (Continuação)

Solução: Vamos analisar as propriedades uma a uma.

Reflexiva: Não.

Pela definição de reflexividade, S seria reflexiva sse

$$\forall x \in \mathbb{R} : x S x.$$

Pela definição de S , isto significaria que

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < x,$$

o que é falso, já que nenhum número real é menor que si mesmo.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 16: (Continuação)

Simétrica: Não.

Pela definição de simetria, S seria simétrica sse

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x S y \rightarrow y S x.$$

Pela definição de S , isto significaria que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \rightarrow y < x,$$

o que é falso, como mostra o contra-exemplo a seguir: $3 < 5$ mas $5 \not< 3$.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 16: (Continuação)

Antissimétrica: Sim.

Pela definição de antissimetria, S seria antissimétrica sse

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x S y) \wedge (y S x) \rightarrow (x = y).$$

Pela definição de S , isto significaria que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < y) \wedge (y < x) \rightarrow (x = y),$$

o que é verdadeiro por vacuidade, já que a premissa da implicação é sempre falsa.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 16: (Continuação)

Transitiva: Sim.

Pela definição de transitividade, S seria transitiva sse

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x S y) \wedge (y S z) \rightarrow (x S z).$$

Pela definição de S , isto significaria que

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z).$$

o que é verdadeiro pela transitividade da ordem dos reais.



Verificando propriedades de relações

- Exemplo 17: Seja T uma relação no conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros tal que para todos $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$m T n \text{ sse } 3 \mid (m - n)$$

Mostre se a relação T é reflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 17: (Continuação)

Solução: Vamos analisar as propriedades uma a uma.

Reflexiva: Sim.

Pela definição de reflexividade, T seria reflexiva sse

$$\forall m \in \mathbb{Z} : m T m.$$

Pela definição de T , isto significaria que

$$\forall m \in \mathbb{Z} : 3 \mid (m - m),$$

o que equivale a dizer que

$$\forall m \in \mathbb{Z} : 3 \mid 0.$$

Esta afirmação é verdadeira já que 3 divide 0 (pois $0 = 3 \cdot 0$).

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 17: (Continuação)

Simétrica: Sim.

Pela definição de simetria, T seria simétrica sse

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} : m T n \rightarrow n T m.$$

Pela definição de T , isto significaria que

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} : 3 \mid (m - n) \rightarrow 3 \mid (n - m).$$

Suponha que m e n sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3 \mid (m - n)$. Deve-se mostrar que neste caso também temos $3 \mid (n - m)$.

Mas se $3 \mid (m - n)$ é porque $m - n = 3k$ para algum k inteiro. Logo, $n - m = 3(-k)$, o que significa que também $3 \mid (n - m)$.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 17: (Continuação)

Antissimétrica: Não.

Pela definição de antissimetria, T seria antissimétrica sse

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} : (m T n) \wedge (n T m) \rightarrow (m = n).$$

Pela definição de T , isto significaria que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (3 \mid (m - n)) \wedge (3 \mid (n - m)) \rightarrow (m = n),$$

o que é falso, como mostra o contra-exemplo em que $m = 3$ e $n = 6$:

$$3 \mid (3 - 6) \text{ e } 3 \mid (6 - 3) \text{ mas } 3 \neq 6.$$

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 17: (Continuação)

Transitiva: Sim.

Pela definição de transitividade, T seria transitiva sse

$$\forall m, n, p \in \mathbb{Z} : (m T p) \wedge (p T n) \rightarrow (m T n).$$

Pela definição de T , isto significaria que

$$\forall m, n, p \in \mathbb{Z} : (3 \mid (m - p)) \wedge (3 \mid (p - n)) \rightarrow (3 \mid (m - n)).$$

Suponha que m , n e p sejam inteiros específicos mas escolhidos aleatoriamente tais que $3 \mid (m - p)$ e $3 \mid (p - n)$. Deve-se mostrar que $3 \mid (m - n)$.

Verificando propriedades de relações

- Exemplo 17: (Continuação)

Transitiva: (Continuação)

Mas se $3 \mid (m - p)$, isso significa que existe um inteiro r tal que $m - p = 3r$; e, da mesma forma, $3 \mid (p - n)$ significa que existe um inteiro s tal que $p - n = 3s$.

Daí podemos derivar:

$$\begin{aligned}m - n &= (m - p) + (p - n) \\ &= 3r + 3s \\ &= 3(r + s),\end{aligned}$$

e isto significa que $3 \mid (m - n)$.



Verificando propriedades de relações

- Exemplo 18: É possível que uma relação seja, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica?

Solução: Sim. A relação identidade, por exemplo, é simétrica e antissimétrica.

Por exemplo, a relação identidade I sobre os naturais \mathbb{N} definida como

$$I = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

satisfaz:

- simetria, pois $\forall n \in \mathbb{N}, (n, n) \in I$;
- e
- antissimetria, pois $\forall n, m \in \mathbb{N}$, se $(n, m) \in I$ e $(m, n) \in I$, então $(n = m)$.



Combinando relações

- Uma vez que relações são subconjuntos, operações usuais sobre conjuntos podem ser usadas para combinar relações.
- Exemplo 19: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

As relações

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \quad \text{e} \quad R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

podem ser combinadas para obterem-se:

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- $R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$



Combinando relações

- A representação de relações como matrizes pode facilitar o cálculo da combinação de relações.
- Seja uma relação R de A para B . A **matriz booleana** M_R que a representa R é definido como:

$$M_R[a, b] = \begin{cases} 1, & \text{se } (a, b) \in R, \\ 0, & \text{se } (a, b) \notin R \end{cases}$$

Podemos calcular a união, interseção e diferença de relações como

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2},$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}, \quad \text{e}$$

$$M_{R_1 - R_2} = M_{R_1} \wedge \neg M_{R_2}.$$

Combinando relações

- Exemplo 20: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. As relações

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \quad e$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

encontre $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ e $R_1 - R_2$ usando a representação em forma de matrizes booleanas.

Solução: As matrizes booleanas representando R_1 e R_2 são

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Combinando relações

- Exemplo 20: (Continuação)

Assim podemos calcular:

$$M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{logo } R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}.$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{logo } R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}.$$

$$M_{R_1 - R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \neg \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{logo } R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}.$$

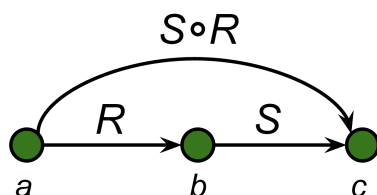


Composição de relações

- Sejam R uma relação de um conjunto A para um conjunto B , e S uma relação do conjunto B para um conjunto C .

A **relação composta** de R e S consiste nos pares ordenados (a, c) , onde $a \in A$ e $c \in C$, para os quais existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

A relação composta de R e S é denotada por $S \circ R$.



Composição de relações

- Exemplo 21: Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{\alpha, \beta\}$. Sejam a relação R de A para B e a relação S de B para C abaixo:

$$R = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (z, 2)\} \quad e$$

$$S = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \beta)\}$$

Determine a relação composta $S \circ R$.

Solução: A relação $S \circ R$ é construída tomando-se todos os pares ordenados em R e todos os pares ordenados em S , onde o segundo elemento do par em R é o mesmo que o primeiro elemento do par em S .

Por exemplo, $(x, 1) \in R$ e $(1, \alpha) \in S$, logo $(x, \alpha) \in S \circ R$.

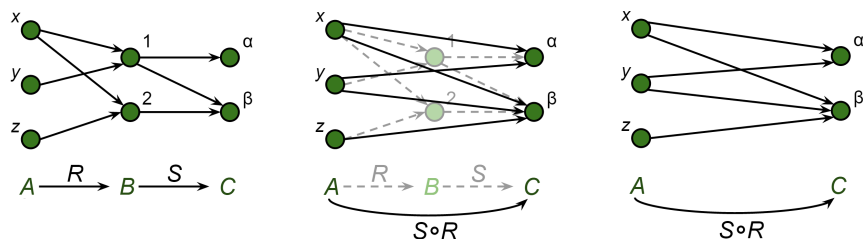
Logo

$$S \circ R = \{(x, \alpha), (x, \beta), (y, \alpha), (y, \beta), (z, \beta)\}.$$

Combinando relações

Exemplo 21: (Continuação)

Neste exemplo, o diagrama de setas das relações pode facilitar para determinação da relação composta.



Logo

$$S \circ R = \{(x, \alpha), (x, \beta), (y, \alpha), (y, \beta), (z, \beta)\}.$$



Combinando relações

- Representando relações como matrizes booleanas, podemos calcular a composição de relações usando o **produto booleano de matrizes**.
- Sejam A e B matrizes booleanas de dimensões $m \times k$ e $k \times n$, respectivamente.

O **produto booleano** de A e B , denotado por $A \odot B$, é a matriz de dimensões $m \times n$ em que cada entrada $(A \odot B)_{i,j}$ é dada por:

$$\begin{aligned} (A \odot B)_{i,j} &= (A_{i,1} \wedge B_{1,j}) \vee (A_{i,2} \wedge B_{2,j}) \vee \dots \vee (A_{i,k} \wedge B_{k,j}) \\ &= \bigvee_{\ell=1}^k (A_{i,\ell} \wedge B_{\ell,j}). \end{aligned}$$

(Intuitivamente, o produto booleano de matrizes é análogo ao produto tradicional matrizes, porém com a disjunção (\vee) substituindo a adição, e a conjunção (\wedge) substituindo a multiplicação.)

Combinando relações

- A composição $S \circ R$ pode ser calculada como o produto booleano de matrizes

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S.$$

Relembre que a notação $S \circ R$ significa que primeiro é aplicada a relação R , e depois é aplicada a relação S .

Na composição via matrizes booleanas, a multiplicação é feita na mesma ordem em que as relações correspondentes são aplicadas.

- Logo, a composição $R_n \circ R_{n-1} \circ \dots \circ R_2 \circ R_1$ pode ser calculada como o produto booleano de matrizes

$$M_{R_n \circ R_{n-1} \circ \dots \circ R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2} \odot \dots \odot M_{R_{n-1}} \odot M_{R_n}.$$

Composição de relações

- Exemplo 22:** Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{\alpha, \beta\}$. Sejam a relação R de A para B e a relação S de B para C abaixo:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (z, 2)\} & e \\ S &= \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha)\} \end{aligned}$$

Determine a relação composta $S \circ R$ usando a representação em forma de matrizes.

Solução: As matrizes booleanas de R e S são

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde em M_R linhas estão associadas aos valores de $A = \{x, y, z\}$, e as colunas estão associadas aos valores de $B = \{1, 2\}$, enquanto em M_S as linhas estão associadas aos valores de $B = \{1, 2\}$, e as colunas estão associadas aos valores de $C = \{\alpha, \beta\}$.

Composição de relações

- Exemplo 22: (Continuação)

Agora podemos calcular

$$\begin{aligned}
 M_{S \circ R} &= M_R \odot M_S \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \bigvee_{\ell=1}^{\ell=2} (M_R(1, \ell) \wedge M_S(\ell, 1)) & \bigvee_{\ell=1}^{\ell=2} (M_R(1, \ell) \wedge M_S(\ell, 2)) \\ \bigvee_{\ell=1}^{\ell=2} (M_R(2, \ell) \wedge M_S(\ell, 1)) & \bigvee_{\ell=1}^{\ell=2} (M_R(2, \ell) \wedge M_S(\ell, 2)) \\ \bigvee_{\ell=1}^{\ell=2} (M_R(3, \ell) \wedge M_S(\ell, 1)) & \bigvee_{\ell=1}^{\ell=2} (M_R(3, \ell) \wedge M_S(\ell, 2)) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

e portanto $S \circ R = \{(x, \alpha), (x, \beta), (y, \alpha), (y, \beta), (z, \alpha)\}$.



Composição de relações

- Uma relação em um conjunto pode ser composta com ela mesma.
- Exemplo 23: Seja H o conjunto de todas as pessoas e F a relação em H tal que $(a, b) \in F$ sse a é filho(a) de b .

Podemos compor F com ela mesma obtendo

$$F \circ F = \{(a, c) \in H \times H \mid \text{existe } b \text{ tal que } (a, b) \in F \wedge (b, c) \in F\}.$$

Intuitivamente, $(a, c) \in F \circ F$ sse a é filho(a) de um filho(a) de c , ou seja, se a é neto(a) de c .

Analogamente, a relação $F \circ F \circ F$ representaria a relação em que $(a, d) \in F \circ F \circ F$ sse a é bisneto(a) de d .



Composição de relações

- A composição de uma relação com ela mesma pode ser generalizada da seguinte forma.

Seja R uma relação em um conjunto A . As potências R^n , para $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas recursivamente como

$$\begin{cases} R^1 = R \\ R^{n+1} = R^n \circ R \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 R^2 &= R^1 \circ R = R \circ R, \\
 R^3 &= R^2 \circ R = R \circ R \circ R, \\
 R^4 &= R^3 \circ R = R \circ R \circ R \circ R, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

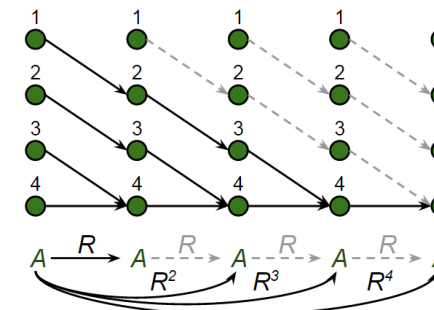
Composição de relações

- Exemplo 24: Seja a relação $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Encontre as potências R^n para $n = 1, 2, 3, 4$.

Solução:

Diagrama da composição:



Cada potência:

$$\begin{aligned}
 R^1 &= R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}, \\
 R^2 &= R^1 \circ R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}, \\
 R^3 &= R^2 \circ R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}, \\
 R^4 &= R^3 \circ R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}.
 \end{aligned}$$

(Para $n > 3$, teremos $R^n = R^3$. Por quê?)

Composição de relações

- Exemplo 24: (Continuação)

Uma solução alternativa é via o produto booleano de matrizes:

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_R \odot M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_R \odot M_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Note novamente que a partir de $n \geq 4$, teremos $R^n = R^3$.)



Fechos de relações

Fecho de uma relação: Introdução

- Vamos motivar fechos com um exemplo.
- Exemplo 25: Uma certa linha aérea atende as cidades de Manaus, Salvador, Belo Horizonte, Cuiabá, São Paulo e Florianópolis.

A companhia oferece voos de ida e de volta entre as cidades de:

- Manaus e Salvador;
- Salvador e Belo Horizonte;
- Belo Horizonte e Cuiabá;
- Belo Horizonte e São Paulo;
- São Paulo e Florianópolis.

Dado um par de cidades, como podemos determinar se é possível ou não voar de uma cidade para outra pela companhia aérea (possivelmente com escalas)?

Fecho de uma relação: Introdução

- Exemplo 25: (Continuação)

Seja R a relação contendo o par (a, b) se a companhia oferece um voo entre a cidade a e a cidade b .

Como algumas cidades não são conectadas diretamente (por exemplo, Belo Horizonte só se conecta a Manaus via Salvador), a relação R não pode ser utilizada diretamente para resolver a questão.

Assuma que possamos construir uma relação S que contenha todos os pares (a, b) de cidades tais que de a pode-se voar a b via a composição de um número n de voos da companhia (ou seja, $(a, b) \in S$ sse $(a, b) \in R^n$ para algum n).

Se pudermos construir tal relação S , temos a solução para o problema: podemos viajar entre duas cidades a e b pela companhia se $(a, b) \in S$.

Como veremos é possível encontrar S como a menor relação transitiva que contém R . Esta relação recebe o nome de **fecho transitivo** de R .



Fecho de uma relação

- Seja R uma relação em um conjunto A .
 R pode ou não pode satisfazer uma certa propriedade P (como reflexividade, simetria, antissimetria ou transitividade).
- Intuitivamente, o **fecho da relação R com respeito à propriedade P** é a menor relação S possível que inclui R e satisfaz a propriedade P .
Ou ainda: o fecho S é obtido ao se adicionar a R o mínimo possível de elementos até que a propriedade P seja satisfeita.
- Formalmente, S é o **fecho de R com respeito à propriedade P** se as três condições abaixo forem satisfeitas:
 - 1 S contém R ,
 - 2 S satisfaz P , e
 - 3 S é um subconjunto de qualquer outra relação que também satisfaça as condições (1) e (2) acima.

Fecho reflexivo

- **Exemplo 26:** Seja a relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Encontre o fecho reflexivo de R .

Solução: R não é reflexiva. Para torná-la reflexiva adicionando o mínimo possível de elementos, adicionamos os pares $(2, 2)$ e $(3, 3)$, já que estes são os únicos pares da forma (a, a) , com $a \in A$, ainda não presentes em R .

A relação assim obtida é

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$$

Podemos verificar que S é o **fecho reflexivo** de R porque

- 1 $R \subseteq S$,
- 2 S é reflexiva, e
- 3 qualquer outra relação que contenha R e seja reflexiva tem que conter S , já que ela tem que conter R e também ambos os pares $(2, 2)$ e $(3, 3)$.



Fecho reflexivo

- O exemplo anterior pode ser generalizado da seguinte forma: dada uma relação R em um conjunto A , podemos obter seu **fecho reflexivo** adicionando a R todos os pares da forma (a, a) com $a \in A$.
- O **fecho reflexivo** de uma relação R sobre um conjunto A é dado pela relação

$$S = R \cup \Delta,$$

onde $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ é **relação diagonal** de A .

Fecho simétrico

- **Exemplo 27:** Seja a relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Encontre o fecho simétrico de R .

Solução: R não é simétrica. Para torná-la simétrica adicionando o mínimo possível de elementos, adicionamos os pares $(2, 1)$ e $(1, 3)$, já que estes são os únicos pares da forma (b, a) não presentes em R quando (a, b) já está presente em R .

A relação assim obtida é

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

Podemos verificar que S é o **fecho simétrico** de R porque

- 1 $R \subseteq S$,
- 2 S é simétrica, e
- 3 qualquer outra relação que contenha R e seja transitiva tem que conter S , já que ela tem que conter R e também ambos os pares $(2, 1)$ e $(1, 3)$.



Fecho simétrico

- O exemplo anterior pode ser generalizado da seguinte forma: dada uma relação R em um conjunto A , podemos obter seu **fecho simétrico** adicionando a R todos o par (b, a) toda vez que $(a, b) \in R$.
- O fecho simétrico de uma relação R sobre um conjunto A é dado pela relação

$$S = R \cup R^{-1},$$

onde R^{-1} a relação inversa de R em A , definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Fecho transitivo

- **Exemplo 28:** Seja a relação $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ no conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Determine o fecho transitivo de R .

Solução: R não é transitiva. Podemos montar uma tabela, como feito abaixo, para determinar quais pares devem ser adicionados a R (os pares adicionados estão marcados com *).

$(a, b) \wedge (b, c)$	(a, c)
$(0, 1)$ e $(1, 2)$	$(0, 2)^*$
$(1, 2)$ e $(2, 3)$	$(1, 3)^*$
$(0, 2)^*$ e $(2, 3)$	$(0, 3)^*$

Assim, o fecho transitivo de R é $S = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.



Fecho transitivo

- Um método eficiente para se calcular o fecho transitivo de uma relação é baseado na seguinte conexão entre transitividade e composição de uma relação consigo mesma.
- **Teorema.** Uma relação R em um conjunto A é transitiva se, e somente se, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$R^n \subseteq R.$$

Prova. Vamos provar cada direção da implicação dupla separadamente.

- Primeiro vamos provar que se $R^n \subseteq R$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$, então R é transitiva.

Nesse caso, por hipótese $R^2 \subseteq R$. Note que R^2 é a relação que contém exatamente os pares (a, c) tais que existe um $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Logo, se $R^2 \subseteq R$, a relação R é transitiva.

Fecho transitivo

- Agora vamos provar que se R é transitiva, então $R^n \subseteq R$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Seja $P(n)$ a proposição “se R é transitiva, então $R^n \subseteq R$ ”. Vamos usar indução matemática para provar que $\forall n : P(n)$ é verdadeiro.

O passo base, $P(1)$, é verdadeiro já que trivialmente $R^1 \subseteq R$.

No passo indutivo, assumimos como hipótese de indução que, para um $k \geq 1$ arbitrário, $P(k)$ é verdadeiro. Queremos mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que se R é transitiva então $R^{k+1} \subseteq R$.

Para isto, assumamos que $(a, b) \in R^{k+1}$. Já que $R^{k+1} = R^k \circ R$, há um elemento $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R^k$. Mas note que, pela I.H., se $(x, b) \in R^k$, então $(x, b) \in R$. Como $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R$, o fato de que R é transitiva implica que $(a, b) \in R$.

Assim mostramos que se R é transitiva, então $(a, b) \in R^{k+1}$ implica em $(a, b) \in R$, e está concluído o passo indutivo. □

Fecho transitivo

- Dada uma relação R em um conjunto A de k elementos, um método eficiente para encontrar seu fecho transitivo S é baseado nas seguintes observações:
 - 1 S é uma relação transitiva, logo S contém as potências S^n , $n = 1, 2, 3, \dots$
 - 2 S contém R , logo S contém todas as potências R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$
 - 3 Como S é a menor relação que contém R , podemos construir S como a união de todas as potências R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$
 - 4 Note que R^n consiste nos pares de elementos de A conectados via exatamente n arestas. Como o número máximo de arestas entre dois elementos de $|A|$ é $k = |A|$ (um ciclo), precisamos considerar no máximo R^k .
- Assim, o fecho transitivo S de uma relação R em um conjunto de k elementos pode ser eficientemente calculado via operações booleanas em matrizes:

$$M_S = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \dots \vee M_{R^k}.$$

- Uma explicação detalhada deste método encontra-se no livro-texto (Rosen).

Relações de equivalência

Relações de equivalência: Introdução

- Existem diversas situações em que elementos de um conjunto são considerados equivalentes para algum propósito.
- Por exemplo:
 - 1 Na linguagem C padrão, nomes de variáveis são considerados distintos apenas até 8 caracteres: quaisquer variáveis que concordem nos 8 primeiros caracteres são consideradas equivalentes.
 - 2 Se estamos interessados apenas no resto da divisão de um inteiro por 3, então há três tipos de inteiros equivalentes: aqueles que têm resto 0 na divisão por 3, aqueles que têm resto 1, e aqueles que têm resto 2.
- Os exemplos acima são **relações de equivalência**, que particionam um conjunto em classes de elementos equivalentes.

Relações de equivalência

- Uma relação R em um conjunto A é uma **relação de equivalência** se R é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Dois elementos $a, b \in A$ relacionados por uma relação de equivalência são chamados de **equivalentes**.
Usamos a notação $a \sim b$ para denotar que a e b são equivalentes sob uma determinada relação de equivalência.
- Para que a noção de equivalência faça sentido, é natural exigir que:
 - 1 cada elemento seja equivalente a si mesmo (reflexividade);
 - 2 que quando a for equivalente a b , que também b seja equivalente a a (simetria); e
 - 3 que quando a for equivalente a b e b for equivalente a c , que a seja equivalente a c (transitividade).

Relações de equivalência

- Exemplo 29: Seja a R relação no conjunto dos reais tal que $a R b$ se, e somente se, $a - b$ é um inteiro.

R é uma relação de equivalência?

Solução: Temos que verificar se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva: Sim, já que $a - a = 0$ é um inteiro para todo real a . Logo

$$\forall a \in \mathbb{R} : a R a.$$

Simétrica: Sim, já que se $a - b$ é inteiro, então $b - a$ também é um inteiro (apenas com o sinal oposto). Logo

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a R b \rightarrow b R a.$$

Transitiva: Sim, se $a - b$ e $b - c$ são ambos inteiros, então $a - c = (a - b) + (b - c)$ é a soma de dois inteiros e, portanto, $a - c$ também é inteiro. Logo

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a R b) \wedge (b R c) \rightarrow (a R c).$$



Relações de equivalência

- Exemplo 30: Mostre que a relação “divide” no conjunto de inteiros positivos não é uma relação de equivalência.

Solução: Para mostrar que a relação não é de equivalência, basta mostrar que ela não é reflexiva, não é simétrica, ou não é transitiva.

A relação “divide” é reflexiva, porque todo inteiro divide a si mesmo.

A relação é transitiva, porque sempre que um a divide um b , e b divide c , então a divide c .

Porém, a relação não é simétrica. Tome o contra exemplo dos números 3 e 6: 3 divide 6, mas 6 não divide 3.

Logo, a relação “divide” é reflexiva e transitiva, mas como não é simétrica não é uma relação de equivalência.



Classes de equivalência

- Uma relação de equivalência R sobre um conjunto A divide os elementos deste conjunto em classes de elementos equivalentes entre si.

- Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A .

O conjunto de todos os elementos relacionados a um elemento a de A é chamado de **classe de equivalência** de a .

A classe de equivalência de a com respeito à relação R é denotada por $[a]_R$.

- Quando for claro a partir do contexto de qual relação R estamos falando, podemos omitir o subscrito R e usar apenas $[a]$ para representar a classe de equivalência $[a]_R$.
- Em outras palavras, a classe de equivalência de um elemento $a \in A$ de acordo com a relação R é

$$[a]_R = \{b \mid (a, b) \in R\}.$$

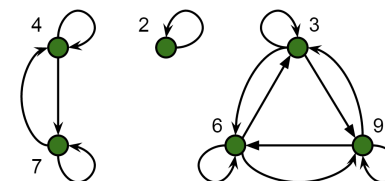
- Qualquer $b \in [a]_R$ pode ser utilizado como um **representante da classe de equivalência**.

Classes de equivalência

- Exemplo 31: Seja a relação de equivalência R no conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ definida como

$$\forall (x, y) \in A \times A : x R y \text{ sse } 3 \mid (x - y).$$

Esta relação de equivalência pode ser representada como o grafo abaixo.



As classes de equivalência de A com respeito a R são:

- $\{4, 7\}$: a classe dos números de A que têm resto 1 na divisão por 3;
- $\{2\}$: a classe dos números de A que têm resto 2 na divisão por 3; e
- $\{3, 6, 9\}$: a classe dos números de A que têm resto 0 na divisão por 3;

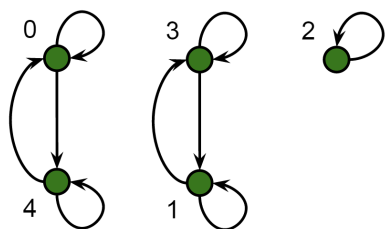


Classes de equivalência

- Exemplo 32: Seja a relação binária R no conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definida como

$$R = \{(0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 0), (4, 4)\}.$$

R é uma relação de equivalência em A , e seu grafo está representado abaixo.



As classes de equivalência de cada elemento de A sob R são:

$$\begin{aligned} [0] &= \{x \in A \mid x R 0\} = \{0, 4\} \\ [1] &= \{x \in A \mid x R 1\} = \{1, 3\} \\ [2] &= \{x \in A \mid x R 2\} = \{2\} \\ [3] &= \{x \in A \mid x R 3\} = \{1, 3\} \\ [4] &= \{x \in A \mid x R 4\} = \{0, 4\} \end{aligned}$$

Assim, as classes de equivalência da relação são:

$$\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}$$



Classes de equivalência e partições

- Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A .

Cada classe de equivalência de R é um subconjunto de A .

Sejam a e b dois elementos quaisquer de A . As classes de equivalência destes elementos deve satisfazer exatamente uma das condições abaixo:

- $[a] = [b]$: os elementos equivalentes a a e os elementos equivalentes a b são exatamente os mesmos;

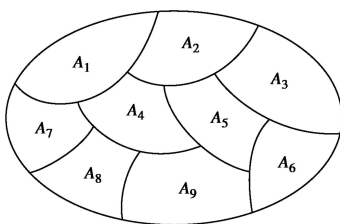
ou

- $[a] \cap [b] = \emptyset$: não há nenhum elemento que seja equivalente a a e a b ao mesmo tempo.

- Isto quer dizer que duas classes de equivalência distintas são sempre disjuntas (não têm interseção).

Classes de equivalência e partições

- Uma **partição de um conjunto** A é uma coleção de subconjuntos disjuntos de A tais que a união destes subconjuntos é o próprio A .



- Formalmente, **uma partição em um conjunto** A é uma coleção de subconjuntos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de A tais que:

1 Para todo $1 \leq i \leq j \leq n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$; e

2 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$.

Classes de equivalência e partições

- A ideia central de uma relação de equivalência é justamente agrupar elementos relacionados entre si.

Classes de equivalência e partições são dois lados da mesma moeda.

- Seja R uma relação de equivalência num conjunto S . Então:

1 As classes de equivalência de R formam uma partição em S .

2 Analogamente, dada uma partição $\{A_i \mid i \in I\}$ no conjunto S , existe uma relação de equivalência R cujas classes de equivalência são exatamente os conjuntos A_i , para cada $i \in I$.

Partição induzida por uma classe de equivalência

- Exemplo 33: Seja a relação de equivalência R no conjunto de números inteiros tal que, para todos inteiros a, b :

$$(a, b) \in R \text{ sse } a = b \pmod{3},$$

ou seja, $(a, b) \in R$ sse eles têm o mesmo resto na divisão por 3.

Qual a partição induzida nos inteiros por esta relação?

Solução: A partição induzida é aquela composta pelas classes de equivalência da relação.

Ou seja, os subconjuntos da partição são exatamente as três classes de equivalência da relação:

- $[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$
- $[1] = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$
- $[2] = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$



Relação de equivalência induzida por uma partição

- Exemplo 34: Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e considere a seguinte partição de A :

$$\{\{0, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$$

Qual é a relação de equivalência R induzida por essa partição?

Solução: A relação R em A induzida pela partição é aquela em que cada par $(a, b) \in R$, sse a e b estão em um mesmo subconjunto na partição A .

Assim, $(0, 3) \in R$ porque 0 e 3 estão no mesmo bloco da partição, enquanto $(0, 1) \notin R$ porque 0 e 1 estão em blocos distintos. Dessa forma, a relação de equivalência R é

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 3), (0, 4), (3, 0), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 3), (4, 4), \\ (1, 1), \\ (2, 2) \end{array} \right\}$$

Note que a relação induzida por uma partição de um conjunto sempre satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.



Relações de ordem parcial

Relações de ordem parcial: Introdução

- Muitas vezes usamos relações para definir precedência entre elementos de um conjunto, ordenando alguns (ou todos) elementos do conjunto.
- São exemplos de relações de ordem ou precedência:
 - a relação (a, b) sobre reais, em que $a \leq b$;
 - a relação (x, y) sobre palavras, em que x precede y no dicionário;
 - a relação (t_1, t_2) sobre tarefas de um projeto, em que t_2 não pode ser iniciada antes que t_1 .
- Os exemplos acima são **relações de ordem parcial**, que organizam a totalidade ou parte dos elementos de um conjunto.

Relações de ordem parcial

- Uma relação R em um conjunto A é uma **relação de ordem parcial**, (ou **ordenação parcial**, ou **ordem parcial**) se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Para que a noção de ordem parcial faça sentido, é natural exigir que:
 - 1 cada elemento esteja na mesma ordem que si mesmo (reflexividade);
 - 2 que a única situação em que um elemento a precede um elemento b e, ao mesmo tempo, o elemento b precede o elemento a , seja a situação em que a e b sejam o mesmo elemento (antissimetria); e
 - 3 que quando a preceder b e b preceder c , que a preceda c (transitividade).

Relações de ordem parcial

- Um conjunto S acoplado a uma ordenação parcial R é chamado de um **conjunto parcialmente ordenado**, ou **poset** (*partially ordered set*).
Membros de S são chamados elementos do poset.
- Exemplos de posets:
 - 1 (\mathbb{R}, \leq) : o conjunto dos números reais e a relação \leq ;
 - 2 $(\mathbb{Z}^+, |)$: o conjunto dos inteiros positivos e a relação “divide”.
 - 3 $(T, precede)$: o conjunto T de tarefas de um projeto e a relação *precede* em T tal que $(t_1, t_2) \in precede$ se a tarefa t_2 não pode ser iniciada antes da tarefa t_1 .

Relações de ordem parcial

- **Exemplo 35:** Seja \leq a relação “menor ou igual a” em \mathbb{R} .
 R é uma ordenação parcial?

Solução: Temos que verificar se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Reflexiva: Sim, já que

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a.$$

Antissimétrica: Sim, já que

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b).$$

Transitiva: Sim, já que

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b) \wedge (b \leq c) \rightarrow (a \leq c).$$



Relações de ordem parcial

- **Exemplo 36:** Seja a relação “divide” no conjunto de inteiros positivos definida como

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : a | b \text{ sse } b = k \cdot a \text{ para algum inteiro } k.$$

Solução: Temos que verificar se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Reflexiva: Sim, já que todo inteiro divide a si mesmo:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a = 1 \cdot a.$$

Relações de ordem parcial

- Exemplo 36: (Continuação)

Antissimétrica: Sim. Temos que mostrar que

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ : (a \mid b) \wedge (b \mid a) \rightarrow (a = b).$$

Assuma que $(a \mid b) \wedge (b \mid a)$. Pela definição da relação, isto quer dizer que existem inteiros k_1 e k_2 tais que $b = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot b$.

Daí podemos fazer

$$\begin{aligned} b &= k_1 \cdot a \\ &= k_1 \cdot (k_2 \cdot b) \\ &= (k_1 \cdot k_2) \cdot b, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $k_1 \cdot k_2 = 1$. Como k_1 e k_2 são inteiros positivos, a única possibilidade é $k_1 = k_2 = 1$. Assim, $a = b \cdot k_2 = b$ (ou, equivalentemente, $b = a \cdot k_1 = a$), e concluímos que $a = b$.

Logo, mostramos que a relação é antissimétrica.

Relações de ordem parcial

- Exemplo 36: (Continuação)

Transitiva: Sim. Temos que mostrar que

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+ : (a \mid b) \wedge (b \mid c) \rightarrow (a \mid c).$$

Se $(a \mid b)$, então existe um inteiro k_1 tal que $b = k_1 \cdot a$. Da mesma forma, se $(b \mid c)$, então existe um inteiro k_2 tal que $c = k_2 \cdot b$. Daí podemos escrever

$$\begin{aligned} c &= k_2 \cdot b \\ &= k_2 \cdot (k_1 \cdot a) \\ &= (k_2 \cdot k_1) \cdot a, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $(a \mid c)$ pois $k_2 \cdot k_1$ é inteiro.

Logo, mostramos que a relação é transitiva.



Elementos comparáveis e conjuntos totalmente ordenados

- Dois elementos a e b de um poset (S, \preceq) são **comparáveis** se ou $a \preceq b$ ou $b \preceq a$;

Se a e b são elementos de S tais que nem $a \preceq b$ nem $b \preceq a$, eles são **incomparáveis**.

- Se quaisquer dois elementos a e b de um poset (S, \preceq) são **comparáveis**, dizemos que S é um **conjunto totalmente** (ou **linearmente**) **ordenado**.

Nesse caso, a relação \preceq é chamada de uma **ordem total** ou **ordem linear**.

- Por exemplo:

- o poset (\mathbb{R}, \leq) é totalmente ordenado, já que dados quaisquer reais a e b , temos que $a \leq b$ ou $b \leq a$.
- o poset (\mathbb{Z}, \mid) não é totalmente ordenado. Por exemplo, 3 e 5 são inteiros tais que nem $3 \mid 5$ nem $5 \mid 3$.

Ordem lexicográfica

- Seja S um conjunto com uma relação de ordem parcial, \preceq .

Seja S^* o produto cartesiano de S consigo mesmo (do mesmo modo que Σ^* é o conjunto de todas as strings sobre um alfabeto Σ).

Pode-se definir uma **ordem lexicográfica** ou **ordem de “dicionário”** no conjunto S^* da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ se}$$

- Se $m \leq n$ e $a_i = b_i$ para todos os $1 \leq i \leq m$.
(Ou seja, se (a_1, a_2, \dots, a_m) é prefixo de (b_1, b_2, \dots, b_n) .)
- Existe um k satisfazendo $1 \leq k \leq \min(m, n)$, tal que $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq k-1$, e $a_k \preceq b_k$ mas $a_k \neq b_k$.
(Ou seja, ignora-se o prefixo em comum, e o primeiro elemento distinto decide.)
- Se $(a_1, a_2, \dots, a_m) = \lambda$ é a sequência vazia.
(Ou seja, a sequência vazia precede qualquer outra.)

Ordem lexicográfica

- Exemplo 37: Seja $S = \{\perp, \top\}$ e R com seguinte relação de ordem parcial: $\perp \preceq \top$.

Diga se os seguintes strings estão ordenados lexicograficamente S^* :

- $\top\perp\top\perp\perp\top\top \preceq \top\perp\top\perp\top$? Sim, pelo caso 2.
- $\perp\perp\top\perp\top\top\top \preceq \perp\perp\top\perp\perp\top\top$? Não, já que $a_5 \not\preceq b_5$.
- $\top\top\perp\perp \preceq \top\top\perp\perp\perp$? Sim, pelo caso 1.
- $\lambda \preceq \perp\perp\top$? Sim, pelo caso 3.



Diagrama de Hasse

- Algumas arestas no grafo que representa uma relação de ordem parcial não precisam ser desenhadas, uma vez que elas necessariamente têm que estar presentes.
- Um **Diagrama de Hasse** é uma simplificação do grafo de uma relação de ordem parcial que elimina arestas cuja existência pode ser inferida.

No Diagrama de Hasse:

- Não são representados *loops*, porque pode-se inferir sua presença pela reflexividade da ordem parcial.
- Não são representadas arestas cuja presença pode ser inferida pela transitividade da ordem parcial.

(Ou seja, sempre que houver uma aresta de um vértice para um segundo, e deste segundo para um terceiro, qualquer aresta do primeiro para o terceiro pode ser eliminada.)

- Assume-se que todas as arestas apontam “para cima”, e arestas são desenhadas como linhas simples em vez de setas.

Diagrama de Hasse

- Exemplo 38: Seja $A = \{1, 2, 3, 9, 18\}$ e considere a relação “divide” no conjunto como

$$\forall a, b \in A : a \mid b \text{ sse } b = a \cdot k \text{ para para algum inteiro } k.$$

Grafo direcionado da relação:

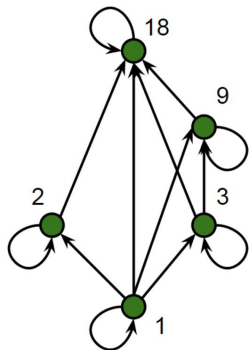


Diagrama de Hasse da relação:

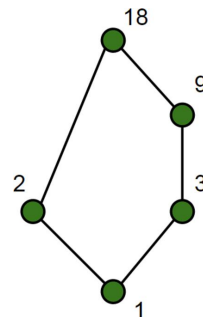


Diagrama de Hasse

- Exemplo 39: Seja o poset $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$, ou seja, o poset formado pelo conjunto potência $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ e a relação de pertinência de conjuntos. Construa o Diagrama de Hasse dessa relação.

Solução:

Grafo direcionado da relação:

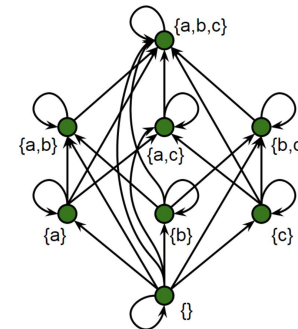


Diagrama de Hasse da relação:

