DCC/ICEx/UFMG **2016/02**
Matemática Discreta **Prof. Mário S. Alvim**

LISTA DE EXERCÍCIOS

Predicados e Quantificadores
(Rosen - Capítulo 1)

Leitura necessária para esta lista: *Discrete Mathematics and Its Applications* (Rosen, 7ª Edição):

- Capítulo 1.4: *Predicates and Quantifiers*
- Capítulo 1.5: *Nested Quantifiers*

Observação: Os exercícios estão classificados em níveis de dificuldade: `[Fácil]`, `[Médio]` e `[Difícil]`. Esta classificação, entretanto, é apenas indicativa. Pessoas diferentes podem discordar sobre o nível de dificuldade de um mesmo exercício. Não desanime ao ver um exercício difícil, você pode descobrir que ele é fácil, encontrando uma maneira de resolvê-lo mais simples do que a do professor!

---

1. (Rosen 1.4.7) Traduza as expressões abaixo para linguagem natural, sabendo que $C(x)$ é *"x é um comediante"*, $F(x)$ é *"x é engraçado"*, e o universo de discurso é o conjunto de todas as pessoas.

   (a) `[Médio]` $\forall x : (C(x) \rightarrow F(x))$
   (b) `[Fácil]` $\forall x : (C(x) \wedge F(x))$
   (c) `[Médio]` $\exists x : (C(x) \rightarrow F(x))$
   (d) `[Fácil]` $\exists x : (C(x) \wedge F(x))$

2. (Rosen 1.4.15) Determine o valor de verdade das sentenças abaixo, sabendo que o domínio das variáveis consiste nos números inteiros.

   (a) `[Fácil]` $\forall n : n^2 \geq 0$
   (b) `[Fácil]` $\exists n : n^2 = 2$
   (c) `[Fácil]` $\forall n : n^2 \geq n$
   (d) `[Fácil]` $\exists n : n^2 < 0$

3. (Rosen 1.4.27) Traduza cada uma das afirmações abaixo em expressões lógicas de 3 maneiras diferentes, variando o domínio e utilizando predicados com uma e duas variáveis.

   (a) `[Médio]` Um estudante na sua escola já viveu no Vietnam.

4. `[Fácil]` (Rosen 1.4.50) Mostre que $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$ e $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

5. `[Médio]` (Rosen 1.4.59) Sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ as proposições *"x é um professor"*, *"x é ignorante"*, e *"x é convencido"*, respectivamente. Expresse cada uma das declarações utilizando quantificadores, conectivos lógicos, $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, onde o domínio consiste de todas as pessoas.

   (a) Nenhum professor é ignorante.
   (b) Todas as pessoas ignorantes são convencidas.
   (c) Nenhum professor é convencido.

(d) É verdade que (c) segue de (a) e (b)?

6. `[Médio]` (Rosen 1.5.1) Traduza as sentenças seguintes para linguagem natural, usando como domínio o conjunto dos números reais.

   (a) $\forall x : \exists y : (x < y)$
   (b) $\forall x : \forall y : (((x \geq 0) \land (y \geq 0)) \rightarrow (xy \geq 0))$
   (c) $\forall x : \forall y : \exists z : (xy = z)$

7. (Rosen 1.5.9) Seja $L(x, y)$ o predicado *"x ama y"*, onde o domínio consiste de todas as pessoas no mundo. Utilize quantificadores para expressar cada uma das afirmações abaixo:

   (a) `[Fácil]` Todos amam Jerry.
   (b) `[Fácil]` Todo mundo ama alguém.
   (c) `[Fácil]` Existe alguém que é amado por todos.
   (d) `[Fácil]` Ninguém ama a todos.
   (e) `[Fácil]` Há alguém que Lydia não ame.
   (f) `[Fácil]` Existe alguém que não é amado por ninguém.
   (g) `[Difícil]` Existe exatamente uma pessoa que é amada por todos.
   (h) `[Difícil]` Existem exatamente duas pessoas que Lynn ama.
   (i) `[Fácil]` Todo mundo ama a si mesmo(a).
   (j) `[Médio]` Existe alguém que não ama a ninguém além de si mesmo(a).

8. (Rosen 1.5.11) Seja $S(x)$ o predicado *"x é um estudante"*, $F(x)$ o predicado *"x é um funcionário"*, e $A(x, y)$ o predicado *"x fez uma pergunta a y"*, onde o domínio das variáveis x e y consiste de todos as pessoas associadas à universidade. Utilize quantificadores para expressar cada uma das afirmações.

   (a) `[Fácil]` Lois fez uma pergunta ao Prof. Michael.
   (b) `[Fácil]` Todos os estudantes fizeram uma pergunta ao Prof. Gross.
   (c) `[Médio]` Todos os funcionários ou fizeram uma pergunta ao Prof. Miller ou tiveram uma pergunta feita a si pelo Prof. Miller.
   (d) `[Médio]` Existe um estudante que não fez nenhuma pergunta a nenhum funcionário.
   (e) `[Médio]` Existe um funcionário que nunca recebeu uma pergunta de um estudante.
   (f) `[Médio]` Todo funcionário já foi perguntado por algum estudante.
   (g) `[Médio]` Existe um funcionário que já fez um pergunta a todo outro funcionário.
   (h) `[Médio]` Existe um estudante que nunca recebeu uma pergunta de um funcionário.

9. (Rosen 1.5.31) Expresse a negação de cada afirmação de forma que todos sinais de negação precedam imediatamente os predicados.

   (a) `[Fácil]` $\forall x : \exists y : \forall z : T(x, y, z)$
   (b) `[Médio]` $\forall x : \exists y : P(x, y) \lor \forall x : \exists y : Q(x, y)$
   (c) `[Médio]` $\forall x : \exists y : (P(x, y) \land \exists z : R(x, y, z))$
   (d) `[Médio]` $\forall x : \exists y : (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

10. `[Difícil]` (Rosen 1.5.44) Utilize quantificadores e conectivos lógicos para expressar que um polinômio quadrático com coeficientes em $\mathbb{R}$ tem no máximo duas raízes em $\mathbb{R}$.