DCC/ICEx/UFMG **2016/02**
Matemática Discreta **Prof. Mário S. Alvim**

LISTA DE EXERCÍCIOS

Indução matemática fraca, indução matemática forte
(Rosen - Capítulo 5)

Leitura necessária para esta lista: *Discrete Mathematics and Its Applications* (Rosen, 7ª Edição):

- Capítulo 5.1: *Mathematical Induction*
- Capítulo 5.2: *Strong Induction and Well-Ordering*

Observação: Os exercícios estão classificados em níveis de dificuldade: `[Fácil]`, `[Médio]` e `[Difícil]`. Esta classificação, entretanto, é apenas indicativa. Pessoas diferentes podem discordar sobre o nível de dificuldade de um mesmo exercício. Não desanime ao ver um exercício difícil, você pode descobrir que ele é fácil, encontrando uma maneira de resolvê-lo mais simples do que a do professor!

---

1. (Rosen 5.1-3) Seja $P(n)$ a afirmação de que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para o inteiro positivo n.

   (a) `[Fácil]` Qual é a afirmação $P(1)$?

   (b) `[Fácil]` Mostre que $P(1)$ é verdadeiro, completando o passo base da prova.

   (c) `[Fácil]` Qual é a hipótese de indução?

   (d) `[Fácil]` O que você precisa provar no passo indutivo?

   (e) `[Médio]` Complete o passo indutivo.

   (f) `[Fácil]` Explique por que os passos acima mostram que a fórmula é verdadeira para todo inteiro positivo n.

2. `[Médio]` (Rosen 5.1-6) Demonstre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para $n \geq 1$.

3. `[Médio]` (Rosen 5.1-11) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n e prove que a fórmula está correta.

4. `[Médio]` (Rosen 5.1-21) Demonstre que $2^n > n^2$ para $n \geq 5$, n inteiro.

5. `[Médio]` (Rosen 5.1-33) Demonstre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n é um inteiro não-negativo.

6. `[Médio]` (Rosen 5.1-60) Demonstre que $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n$, para todo $n \geq 1$. (Dica: use a lei de De Morgan que diz que $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.)

7. (Rosen 5.2-3) Seja $P(n)$ a proposição "uma postagem de n centavos pode ser formada utilizando apenas selos de 3 centavos e selos de 5 centavos". Esse exercício ilustra uma prova por indução forte de que $P(n)$ é verdade para $n \geq 8$.

   (a) `[Fácil]` Mostre que as proposições $P(8)$, $P(9)$ e $P(10)$ são verdadeiras, completando o passo base da prova.

   (b) `[Fácil]` Qual é a hipótese indutiva da prova?

   (c) `[Fácil]` O quê você necessita provar no passo indutivo?

   (d) `[Difícil]` Complete o passo indutivo para $k \geq 10$.

(e) [Médio] Explique porque estes passos mostram que a proposição é verdadeira sempre que $n \geq 8$.

8. [Médio] Considere uma barra de chocolate formada por uma única fileira de n quadradinhos como na figura abaixo.

1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n

Suponha que você queira separar todos os quadradinhos da barra, de forma a obter n quadradinhos individuais. Assuma que você pode realizar quebras na barra apenas entre dois quadradinhos consecutivos (i.e., você não pode partir um quadradinho no meio, apenas separar um quadradinho do outro).

Usando indução forte, demonstre que para qualquer barra de n quadradinhos são necessárias exatamente $n-1$ quebras para separar todos os quadradinhos.

9. [Difícil] (Rosen 5.2-12) Utilize indução forte e mostre que todo inteiro positivo n pode ser escrito como a soma de potências de 2 distintas, ou seja, como a soma de um subconjunto dos inteiros $2^0,\ 2^1\ , 2^2, ...$ (Dica: no passo indutivo, considere separadamente os casos $k+1$ ímpar ou par. Note que $\frac{k+1}{2}$ é inteiro quando $k+1$ é par.)

10. [Médio] Os *números de Fibonacci*, $f_0, f_1, ...$ são definidos pela equações $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n = 2, 3, 4, ...$ Utilize indução forte para mostrar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

para $n = 0, 1, 2, ...$