

LISTA DE EXERCÍCIOS
RECURSÃO E INDUÇÃO ESTRUTURAL
(ROSEN - CAPÍTULO 5)

Leitura necessária para esta lista: *Discrete Mathematics and Its Applications* (Rosen, 7ª Edição):

- Capítulo 5.3: *Recursive Definitions and Structural Induction*

Observação: Os exercícios estão classificados em níveis de dificuldade: [Fácil], [Médio] e [Difícil]. Esta classificação, entretanto, é apenas indicativa. Pessoas diferentes podem discordar sobre o nível de dificuldade de um mesmo exercício. Não desanime ao ver um exercício difícil, você pode descobrir que ele é fácil, encontrando uma maneira de resolvê-lo mais simples do que a do professor!

- (Rosen 4.3-7) Dê uma definição recursiva para a sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ se
 - [Fácil] $a_n = 6n$.
 - [Médio] $a_n = 2n + 1$.
 - [Médio] $a_n = 10^n$.
 - [Fácil] $a_n = 5$.
- (Rosen 4.3-8) Dê uma definição recursiva para a sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ se
 - [Fácil] $a_n = 4n - 2$.
 - [Médio] $a_n = 1 + (-1)^n$.
 - [Médio] $a_n = n(n + 1)$.
 - [Fácil] $a_n = n^2$.
- (Rosen 4.3-25) Dê uma definição recursiva de:
 - [Fácil] o conjunto dos inteiros pares.
 - [Fácil] o conjunto dos inteiros positivos congruentes a 2 módulo 3 (ou seja, os inteiros positivos que têm resto 2 na divisão por 3).
 - [Médio] o conjunto dos inteiros positivos não divisíveis por 5.
- (Rosen 4.3-27a,c) Seja S um subconjunto dos pares ordenados de inteiros, definido recursivamente por
Passo base: $(0, 0) \in S$,
Passo recursivo: Se $(a, b) \in S$, então $(a, b + 1) \in S$, $(a + 1, b + 1) \in S$ e $(a + 2, b + 1) \in S$.
 - [Fácil] Liste os elementos de S produzidos pelas quatro primeiras aplicações da definição recursiva.
 - [Médio] Utilize indução estrutural para mostrar que $a \leq 2b$ quando $(a, b) \in S$.
- (Rosen 4.3-29) Dê uma definição recursiva para cada um dos conjuntos de pares ordenados de inteiros positivos. (Dica: Plote os pontos no plano e procure por linhas que contenham os pontos do conjunto.)
 - [Médio] $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^+, a + b \text{ é par}\}$

(b) [Médico] $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^+, a \text{ ou } b \text{ é ímpar}\}$

6. [Difícil] (Rosen 4.3-35) Dê uma definição recursiva para o reverso de uma string. (Dica: primeiro defina o reverso de uma string vazia λ . Então escreva uma string w de tamanho $n + 1$ como xy , onde x é uma string de tamanho n , e expresse o reverso de w em termos de x^R e y .)
7. [Difícil] (Rosen 4.3-43) Seja T é uma árvore binária completa (ou seja, uma árvore em que todos os nós internos têm exatamente dois nós filhos), seja $n(T)$ o número de nós na árvore T , e seja $h(T)$ a altura (ou seja, o maior caminho da raiz até uma folha da árvore) de T .

Use indução estrutural para mostrar que $n(T) \geq 2h(T) + 1$.