DCC/ICEx/UFMG **2016/02**
Matemática Discreta **Prof. Mário S. Alvim**

LISTA DE EXERCÍCIOS

Relações
(Rosen - Capítulo 9)

Leitura necessária para esta lista: *Discrete Mathematics and Its Applications* (Rosen, 7ª Edição):

- Capítulo 9.1: *Relations and Their Properties*
- Capítulo 9.3: *Representing Relations*
- Capítulo 9.4: *Closures of Relations*
- Capítulo 9.5: *Equivalence Relations*
- Capítulo 9.6: *Partial Orderings*

Observação: Os exercícios estão classificados em níveis de dificuldade: `[Fácil]`, `[Médio]` e `[Difícil]`. Esta classificação, entretanto, é apenas indicativa. Pessoas diferentes podem discordar sobre o nível de dificuldade de um mesmo exercício. Não desanime ao ver um exercício difícil, você pode descobrir que ele é fácil, encontrando uma maneira de resolvê-lo mais simples do que a do professor!

---

1. `[Médio]` (Rosen 9.1-7) Determine se a relação R no conjunto de todos os inteiros é reflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva, onde $(x, y) \in R$ se, e somente se,

   (a) $x \neq y$.
   (b) $xy \geq 1$.
   (c) $x = y + 1$ ou $x = y - 1$.
   (d) $x = y \pmod 7$.
   (e) x é múltiplo de y.
   (f) x e y são ambos negativos ou ambos não-negativos.
   (g) $x = y^2$.
   (h) $x \geq y^2$.

2. `[Fácil]` (Rosen 9.3-19) Desenhe os grafos direcionados que representam as relações abaixo.

   (a) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
   (b) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
   (c) $\{(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$

3. `[Fácil]` (Rosen 9.4-1) Seja R a relação no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ contendo os pares ordenados $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ e $(3, 0)$. Encontre o fecho reflexivo e o fecho simétrico de R.

4. `[Médio]` (Rosen 9.4-25) Utilize o algoritmo 1 da seção 8.4 para encontrar o fecho transitivo das relações abaixo sobre $\{1, 2, 3, 4\}$:

   (a) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$
   (b) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$

5. `[Médio]` (Rosen 9.5-3) Quais destas relações no conjunto de todas as funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são relações de equivalência? Para as relações que não forem de equivalência, determine quais propriedades de uma relação de equivalência elas não têm.

(a) $\{(f,g) \mid f(1) = g(1)\}$
(b) $\{(f,g) \mid f(0) = g(0) \text{ ou } f(1) = g(1)\}$
(c) $\{(f,g) \mid f(x) - g(x) = 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{Z}\}$
(d) $\{(f,g) \mid \text{ para algum } c \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{Z},\ f(x) - g(x) = c\}$
(e) $\{(f,g) \mid f(0) = g(1) \text{ e } f(1) = g(0)\}$

6. `[Difícil]` (Rosen 9.5-15) Seja R a relação no conjunto de pares ordenados de inteiros positivos tais que $((a,b),(c,d)) \in R$ se, e somente se, $a + d = b + c$. Mostre que R é uma relação de equivalência.

7. `[Médio]` (Rosen 9.6-4) Se S é o conjunto de todas as pessoas no mundo e $(a,b) \in R$, a e b são pessoas, (S,R) é um poset se:

   (a) a não é menor do que b?
   (b) a pesa mais do que b?
   (c) $a = b$ ou a é um descendente de b?
   (d) a e b não têm um amigo em comum?

8. `[Médio]` (Rosen 9.6-5) Quais dos seguintes conjuntos são posets?

   (a) $(\mathbb{Z}, =)$
   (b) $(\mathbb{Z}, \neq)$
   (c) $(\mathbb{Z}, \geq)$
   (d) $(\mathbb{Z}, \nmid)$

9. `[Fácil]` (Rosen 9.6-17) Determine a ordem lexicográfica das seguintes $n-$tuplas:

   (a) $(1,1,2),(1,2,1)$
   (b) $(0,1,2,3),(0,1,3,2)$
   (c) $(1,0,1,0,1),(0,1,1,1,0)$

10. `[Médio]` (Rosen 9.6-22) Desenhe o diagrama de Hasse para a relação de divisibilidade sobre os conjuntos:

    (a) $\{1,2,3,4,5,6\}$
    (b) $\{1,3,9,27,81,243\}$

11. `[Médio]` Seja $A = \{2,4\}$ e $B = \{6,8,10\}$, e defina as relações binárias R e S como:

$$\forall (x,y) \in A \times B, xRy \Leftrightarrow x \mid y$$
$$\forall (x,y) \in A \times B, xSy \Leftrightarrow y - 4 = x$$

    Liste os pares ordenados que estão em $A \times B$, R, S, $R \cup S$, $R \cap S$.

12. `[Médio]` Qual é a composição $S \circ R$ das relações R e S onde R é a relação de $\{1,2,3\}$ para $\{1,2,3,4\}$ com $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$ e S é a relação de $\{1,2,3,4\}$ para $\{0,1,2\}$ com $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$?