Ordenação*

Última alteração: 26 de Março de 2004

*Transparências elaboradas por Fabiano C. Botelho e Nivio Ziviani

Ordenação

Introdução - Conceitos Básicos

- Ordenar: processo de rearranjar um conjunto de objetos em uma ordem ascendente ou descendente.
- A ordenação visa facilitar a recuperação posterior de itens do conjunto ordenado.
  - Dificuldade de se utilizar um catálogo telefônico se os nomes das pessoas não estivessem listados em ordem alfabética.
- Notação utilizada nos algoritmos:
  - Os algoritmos trabalham sobre os registros de um arquivo.
  - Cada registro possui uma **chave** utilizada para controlar a ordenação.
  - Podem existir outros componentes em um registro.

Introdução - Conceitos Básicos

- Estrutura de um registro:

```
type Item = record
              Chave: ChaveTipo;
              { outros componentes }
            end;
```

- Qualquer tipo de chave sobre o qual exista uma regra de ordenação bem-definida pode ser utilizado.
- Um método de ordenação é **estável** se a ordem relativa dos itens com chaves iguais não se altera durante a ordenação.
- Alguns dos métodos de ordenação mais eficientes não são estáveis.
- A estabilidade pode ser forçada quando o método é não-estável.
- Sedgewick (1988) sugere agregar um pequeno índice a cada chave antes de ordenar, ou então aumentar a chave de alguma outra forma.

Introdução - Conceitos Básicos

- Classificação dos métodos de ordenação:
  - Ordenação interna: arquivo a ser ordenado cabe todo na memória principal.
  - Ordenação externa: arquivo a ser ordenado não cabe na memória principal.
- Diferenças entre os métodos:
  - Em um método de ordenação interna, qualquer registro pode ser imediatamente acessado.
  - Em um método de ordenação externa, os registros são acessados seqüencialmente ou em grandes blocos.
- A maioria dos métodos de ordenação é baseada em **comparações** das chaves.
- Existem métodos de ordenação que utilizam o princípio da **distribuição**.

Introdução - Conceitos Básicos

- Exemplo de ordenaĞČo por distribuição: considere o problema de ordenar um baralho com 52 cartas na ordem:

$$\text{A} < 2 < 3 < \cdots < 10 < \text{J} < \text{Q} < \text{K}$$

e

$$\clubsuit < \diamondsuit < \heartsuit < \spadesuit.$$

- Algoritmo:
  1. Distribuir as cartas abertas em treze montes: ases, dois, três, $\ldots$, reis.
  2. Colete os montes na ordem especificada.
  3. Distribua novamente as cartas abertas em quatro montes: paus, ouros, copas e espadas.
  4. Colete os montes na ordem especificada.

Introdução - Conceitos Básicos

- Métodos como o ilustrado são também conhecidos como **ordenação digital**, **radixsort** ou **bucketsort**.
- O método não utiliza comparação entre chaves.
- Uma das dificuldades de implementar este método está relacionada com o problema de lidar com cada monte.
- Se para cada monte nós reservarmos uma área, então a demanda por memória extra pode tornar-se proibitiva.
- O custo para ordenar um arquivo com n elementos é da ordem de $O(n)$.

Ordenação Interna

- Na escolha de um algoritmo de ordenação interna deve ser considerado o tempo gasto pela ordenação.
- Sendo n o número registros no arquivo, as medidas de complexidade relevantes sČo:
  - Número de comparações $C(n)$ entre chaves.
  - Número de movimentações $M(n)$ de itens do arquivo.
- O uso econômico da memória disponível é um requisito primordial na ordenação interna.
- Métodos de ordenação ***in situ*** são os preferidos.
- Métodos que utilizam listas encadeadas não são muito utilizados.
- Métodos que fazem cópias dos itens a serem ordenados possuem menor importância.

Ordenação Interna

- Classificação dos métodos de ordenação interna:
  - Métodos simples:
    - Adequados para pequenos arquivos.
    - Requerem $O(n^2)$ comparações.
    - Produzem programas pequenos.
  - Métodos eficientes:
    - Adequados para arquivos maiores.
    - Requerem $O(n \log n)$ comparações.
    - Usam menos comparações.
    - As comparações são mais complexas nos detalhes.
    - Métodos simples são mais eficientes para pequenos arquivos.

Ordenação Interna

- Tipos de dados e variáveis utilizados nos algoritmos de ordenação interna:

```
type Indice = 0..MaxTam;
     Vetor  = array [Indice] of Item;
var A: Vetor;
```

- O índice do vetor vai de 0 até $MaxTam$, devido às chaves **sentinelas**.
- O vetor a ser ordenado contém chaves nas posições de 1 até n.

Ordenação por Seleção

- Um dos algoritmos mais simples de ordenação.
- Algoritmo:
  - Selecione o menor item do vetor.
  - Troque-o com o item da primeira posição do vetor.
  - Repita essas duas operações com os $n-1$ itens restantes, depois com os $n-2$ itens, até que reste apenas um elemento.
- O método é ilustrado abaixo:

	1	2	3	4	5	6
Chaves iniciais:	*O*	*R*	*D*	*E*	*N*	*A*
i = 1	**A**	*R*	*D*	*E*	*N*	**O**
i = 2	*A*	**D**	**R**	*E*	*N*	*O*
i = 3	*A*	*D*	**E**	**R**	*N*	*O*
i = 4	*A*	*D*	*E*	**N**	**R**	*O*
i = 5	*A*	*D*	*E*	*N*	**O**	**R**

- As chaves em negrito sofreram uma troca entre si.

Ordenação por Seleção

```
procedure Selecao (var A: Vetor; var n: Indice);
var i, j, Min: Indice;
    x        : Item;
begin
for i := 1 to n - 1 do
  begin
  Min := i;
  for j := i + 1 to n do
    if A[j].Chave < A[Min].Chave
    then Min := j;
  x := A[Min]; A[Min] := A[i]; A[i] := x;
  end;
end;
```

Análise

- Comparações entre chaves e movimentações de registros:

$$C(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$
$$M(n) = 3(n-1)$$

- A atribuição $Min := j$ é executada em média $n \log n$ vezes, Knuth (1973).

Ordenação por Seleção

Vantagens:

- Custo linar no tamanho da entrada para o número de movimentos de registros.
- É o algoritmo a ser utilizado para arquivos com registros muito grandes.
- É muito interessante para arquivos pequenos.

Desvantagens:

- O fato de o arquivo já estar ordenado não ajuda em nada, pois o custo continua quadrático.
- O algoritmo não é **estável**.

Ordenação por Inserção

- Método preferido dos jogadores de **cartas**.
- Algoritmo:
  - Em cada passo a partir de i=2 faça:
    - Selecione o i-ésimo item da seqüência fonte.
    - Coloque-o no lugar apropriado na seqüência destino de acordo com o critério de ordenação.
- O método é ilustrado abaixo:

	1	2	3	4	5	6
Chaves iniciais:	**O**	*R*	*D*	*E*	*N*	*A*
i = 2	**O**	**R**	*D*	*E*	*N*	*A*
i = 3	**D**	**O**	**R**	*E*	*N*	*A*
i = 4	**D**	**E**	**O**	**R**	*N*	*A*
i = 5	**D**	**E**	**N**	**O**	**R**	*A*
i = 6	**A**	**D**	**E**	**N**	**O**	**R**

- As chaves em negrito representam a seqüência destino.

Ordenação por Inserção

```
procedure Insercao (var A: Vetor; var n: Indice);
var i, j: Indice;
    x   : Item;
begin
for i := 2 to n do
  begin
  x := A[i];
  j := i - 1;
  A[0] := x; { sentinela }
  while x.Chave < A[j].Chave do
    begin
    A[j + 1] := A[j];
    j := j - 1;
    end;
  A[j + 1] := x;
  end;
end;
```


Ordenação por Inserção

Considerações sobre o algoritmo:

- O processo de ordenação pode ser terminado pelas condições:
  - Um item com chave menor que o item em consideração é encontrado.
  - O final da seqüência destino é atingido à esquerda.
- Solução:
  - Utilizar um registro **sentinela** na posição zero do vetor.

Ordenação por Inserção

Análise

- Seja $C(n)$ a função que conta o número de comparações.
- No anel mais interno, na i-ésima iteração, o valor de C_i é:

$$\begin{aligned}
&\text{melhor caso} && : C_i(n) = 1\\
&\text{pior caso} && : C_i(n) = i\\
&\text{caso médio} && : C_i(n) = \tfrac{1}{i}(1 + 2 + \cdots + i) = \tfrac{i+1}{2}
\end{aligned}$$

- Assumindo que todas as permutações de n são igualmente prováveis no caso médio, temos:

$$\begin{aligned}
&\text{melhor caso} && : C(n) = (1 + 1 + \cdots + 1) = n - 1\\
&\text{pior caso} && : C(n) = (2 + 3 + \cdots + n) = \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{2} - 1\\
&\text{caso médio} && : C(n) = \tfrac{1}{2}(3 + 4 + \cdots + n + 1) = \tfrac{n^2}{4} + \tfrac{3n}{4} - 1
\end{aligned}$$

Ordenação por Inserção

Análise

- Seja $M(n)$ a função que conta o número de movimentações de registros.
- O número de movimentações na i-ésima iteração é:

$$M_i(n) = C_i(n) - 1 + 3 = C_i(n) + 2$$

- Logo, o número de movimentos é:

$$\begin{aligned}
&\text{melhor caso} && : M(n) = (3 + 3 + \cdots + 3) = 3(n - 1)\\
&\text{pior caso} && : M(n) = (4 + 5 + \cdots + n + 2) = \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{5n}{2} - 3\\
&\text{caso médio} && : M(n) = \tfrac{1}{2}(5 + 6 + \cdots + n + 3) = \tfrac{n^2}{4} + \tfrac{11n}{4} - 3
\end{aligned}$$

Ordenação por Inserção

- O número mínimo de comparações e movimentos ocorre quando os itens estão originalmente em ordem.
- O número máximo ocorre quando os itens estão originalmente na ordem reversa.
- É o método a ser utilizado quando o arquivo está "quase" ordenado.
- É um bom método quando se deseja adicionar uns poucos itens a um arquivo ordenado, pois o custo é linear.
- O algoritmo de ordenação por inserção é **estável**.

Shellsort

- Proposto por Shell em 1959.
- É uma extensão do algoritmo de ordenação por inserção.
- Problema com o algoritmo de ordenação por inserção:
  - Troca itens adjacentes para determinar o ponto de inserção.
  - São efetuadas $n - 1$ comparações e movimentações quando o menor item está na posição mais à direita no vetor.
- O método de Shell contorna este problema permitindo trocas de registros distantes um do outro.

Shellsort

- Os itens separados de h posições são rearranjados.
- Todo h-ésimo item leva a uma seqüência ordenada.
- Tal seqüência é dita estar h-ordenada.
- Exemplo de utilização:

	1	2	3	4	5	6
Chaves iniciais:	*O*	*R*	*D*	*E*	*N*	*A*
h = 4	*N*	*A*	*D*	*E*	*O*	*R*
h = 2	*D*	*A*	*N*	*E*	*O*	*R*
h = 1	*A*	*D*	*E*	*N*	*O*	*R*

- Quando $h = 1$ Shellsort corresponde ao algoritmo de inserção.

Shellsort

- Como escolher o valor de h:
  - Seqüência para h:

$$h(s) = 3h(s-1) + 1, \quad para\ s > 1$$
$$h(s) = 1, \quad para\ s = 1.$$

  - Knuth (1973, p. 95) mostrou experimentalmente que esta seqüência é difícil de ser batida por mais de 20% em eficiência.
  - A seqüência para h corresponde a 1, 4, 13, 40, 121, 364, 1.093, 3.280, ...

Shellsort

```
procedure Shellsort (var A: Vetor; var n: Indice);
label 999;
var i, j, h: integer;
    x      : Item;
begin
  h := 1;
  repeat h := 3 * h + 1 until h >= n;
  repeat
    h := h div 3;
    for i := h + 1 to n do
      begin
      x := A[i];
      j := i;
      while A[j - h].Chave > x.Chave do
        begin
        A[j] := A[j - h];
        j := j - h;
        if j <= h then goto 999;
        end;
      999: A[j] := x;
      end;
  until h = 1;
end;
```


Shellsort

- A implementação do Shellsort não utiliza registros **sentinelas**.
- Seriam necessários h registros sentinelas, uma para cada h-ordenação.

Shellsort

Análise

- A razão da eficiência do algoritmo ainda não é conhecida.
- Ninguém ainda foi capaz de analisar o algoritmo.
- A sua análise contém alguns problemas matemáticos muito difíceis.
- A começar pela própria seqüência de incrementos.
- O que se sabe é que cada incremento não deve ser múltiplo do anterior.
- Conjecturas referente ao número de comparações para a seqüência de Knuth:

$$Conjetura\ 1 \quad : C(n) = O(n^{1,25})$$

$$Conjetura\ 2 \quad : C(n) = O(n(\ln n)^2)$$

Shellsort

- Vantagens:
  - Shellsort é uma ótima opção para arquivos de tamanho moderado.
  - Sua implementação é simples e requer uma quantidade de código pequena.
- Desvantagens:
  - O tempo de execução do algoritmo é sensível à ordem inicial do arquivo.
  - O método não é **estável**,

Quicksort

- Proposto por Hoare em 1960 e publiccado em 1962.
- É o algoritmo de ordenação interna mais rápido que se conhece para uma ampla variedade de situações.
- Provavelmente é o mais utilizado.
- A idéia básica é dividir o problema de ordenar um conjunto com n itens em dois problemas menores.
- Os problemas menores são ordenados independentemente.
- Os resultados são combinados para produzir a solução final.

Quicksort

- A parte mais delicada do método é o processo de partição.
- O vetor $A[\mathrm{Esq..Dir}]$ é rearranjado por meio da escolha arbitrária de um **pivô** x.
- O vetor A é particionado em duas partes:
  - A parte esquerda com chaves menores ou iguais a x.
  - A parte direita com chaves maiores ou iguais a x.

Quicksort

- Algoritmo para o particionamento:
  1. Escolha arbitrariamente um **pivô** x.
  2. Percorra o vetor a partir da esquerda até que $A[i] \geq x$.
  3. Percorra o vetor a partir da direita até que $A[j] \leq x$.
  4. Troque $A[i]$ com $A[j]$.
  5. Continue este processo até os apontadores i e j se cruzarem.
- Ao final, o vetor $A[\text{Esq..Dir}]$ está particionado de tal forma que:
  - Os itens em $A[\text{Esq}], A[\text{Esq} + 1], \ldots, A[j]$ são menores ou iguais a x.
  - Os itens em $A[i], A[i + 1], \ldots, A[\text{Dir}]$ são maiores ou iguais a x.

Quicksort

- Ilustração do processo de partição:

1	2	3	4	5	6
O	*R*	***D***	*E*	*N*	*A*
A	*R*	***D***	*E*	*N*	*O*
A	***D***	*R*	*E*	*N*	*O*

- O pivô x é escolhido como sendo $A[(i + j) \text{ div } 2]$.
- Como inicialmente $i = 1$ e $j = 6$, então $x = A[3] = D$.
- Ao final do processo de partição i e j se cruzam em $i = 3$ e $j = 2$.

Quicksort

Procedimento Particao:

```
procedure Particao (Esq, Dir: Indice;var i,j: Indice);
var x, w: Item;
begin
  i := Esq; j := Dir;
  x := A[(i + j) div 2]; { obtem o pivo x }
  repeat
    while x.Chave > A[i].Chave do i := i + 1;
    while x.Chave < A[j].Chave do j := j - 1;
    if i <= j
    then begin
         w := A[i]; A[i] := A[j]; A[j] := w;
         i := i + 1; j := j - 1;
         end;
  until i > j;
end;
```

- O anel interno do procedimento Particao é extremamente simples.
- Razão pela qual o algoritmo Quicksort é tão rápido.

Quicksort

Procedimento Quicksort:

```
procedure QuickSort (var A: Vetor; var n: Indice);
{-- Entra aqui o procedimento Particao --}
  procedure Ordena (Esq, Dir: Indice);
  var i, j: Indice;
  begin
    particao (Esq, Dir, i, j);
    if Esq < j then Ordena (Esq, j);
    if i < Dir then Ordena (i, Dir);
  end;
begin
  Ordena (1, n);
end;
```

Quicksort

- Exemplo do estado do vetor em cada chamada recursiva do procedimento Ordena:

Chaves iniciais:	*O*	*R*	*D*	*E*	*N*	*A*
1	*A*	**D**	*R*	*E*	*N*	*O*
2	**A**	*D*				
3			**E**	*R*	*N*	*O*
4				**N**	*R*	*O*
5					*O*	**R**
	A	*D*	*E*	*N*	*O*	*R*

Quicksort

Análise

- Seja $C(n)$ a função que conta o número de comparações.
- Pior caso:

$$C(n) = O(n^2)$$

- O pior caso ocorre quando, sistematicamente, o pivô é escolhido como sendo um dos extremos de um arquivo já ordenado.
- Isto faz com que o procedimento Ordena seja chamado recursivamente n vezes, eliminando apenas um item em cada chamada.
- O pior caso pode ser evitado empregando pequenas modificações no algoritmo.
- Para isso basta escolher três itens quaisquer do vetor e usar a **mediana dos três** como pivô.

Quicksort

Análise

- Melhor caso:

$$C(n) = 2C(n/2) + n = n \log n - n + 1$$

- Esta situação ocorre quando cada partição divide o arquivo em duas partes iguais.
- Caso médio de acordo com Sedgewick e Flajolet (1996, p. 17):

$$C(n) \approx 1,386 n \log n - 0,846 n,$$

- Isso significa que em média o tempo de execução do Quicksort é $O(n \log n)$.

Quicksort

- Vantagens:
  - É extremamente eficiente para ordenar arquivos de dados.
  - Necessita de apenas uma pequena pilha como memória auxiliar.
  - Requer cerca de $n \log n$ comparações em média para ordenar n itens.
- Desvantagens:
  - Tem um pior caso $O(n^2)$ comparações.
  - Sua implementação é muito delicada e difícil:
    * Um pequeno engano pode levar a efeitos inesperados para algumas entradas de dados.
  - O método não é **estável**.

Heapsort

- Possui o mesmo princípio de funcionamento da ordenação por seleção.
- Algoritmo:
  1. Selecione o menor item do vetor.
  2. Troque-o com o item da primeira posição do vetor.
  3. Repita estas operações com os $n-1$ itens restantes, depois com os $n-2$ itens, e assim sucessivamente.
- O custo para encontrar o menor (ou o maior) item entre n itens é $n-1$ comparações.
- Isso pode ser reduzido utilizando uma fila de prioridades.

Heapsort

Filas de Prioridades

- É uma estrutura de dados onde a chave de cada item reflete sua habilidade relativa de abandonar o conjunto de itens rapidamente.
- Aplicações:
  - SOs usam filas de prioridades, nas quais as chaves representam o tempo em que eventos devem ocorrer.
  - Métodos numéricos iterativos são baseados na seleção repetida de um item com maior (menor) valor.
  - Sistemas de gerência de memória usam a técnica de substituir a página menos utilizada na memória principal por uma nova página.

Heapsort

Filas de Prioridades - Tipo Abstrato de Dados

- Operações:
  1. Constrói uma fila de prioridades a partir de um conjunto com n itens.
  2. Informa qual é o maior item do conjunto.
  3. Retira o item com maior chave.
  4. Insere um novo item.
  5. Aumenta o valor da chave do item i para um novo valor que é maior que o valor atual da chave.
  6. Substitui o maior item por um novo item, a não ser que o novo item seja maior.
  7. Altera a prioridade de um item.
  8. Remove um item qualquer.
  9. Ajunta duas filas de prioridades em uma única.

Heapsort

Filas de Prioridades - Representação

- Representação através de uma lista linear ordenada:
  - Neste caso, Constrói leva tempo $O(n \log n)$.
  - Insere é $O(n)$.
  - Retira é $O(1)$.
  - Ajunta é $O(n)$.
- Representação é através de uma lista linear não ordenada:
  - Neste caso, Constrói tem custo linear.
  - Insere é $O(1)$.
  - Retira é $O(n)$.
  - Ajunta é $O(1)$ para apontadores e $O(n)$ para arranjos.

Heapsort

Filas de Prioridades - Representação

- A melhor representação é através de uma estruturas de dados chamada *heap*:
  - Neste caso, Constrói é $O(n)$.
  - Insere, Retira, Substitui e Altera são $O(\log n)$.
- **Observação**:
  Para implementar a operação Ajunta de forma eficiente e ainda preservar um custo logarítmico para as operações Insere, Retira, Substitui e Altera é necessário utilizar estruturas de dados mais sofisticadas, tais como árvores binomiais (Vuillemin, 1978).

Heapsort

Filas de Prioridades - Algoritmos de Ordenação

- As operações das filas de prioridades podem ser utilizadas para implementar algoritmos de ordenação.
- Basta utilizar repetidamente a operação Insere para construir a fila de prioridades.
- Em seguida, utilizar repetidamente a operação Retira para receber os itens na ordem reversa.
- O uso de listas lineares não ordenadas corresponde ao método da seleção.
- O uso de listas lineares ordenadas corresponde ao método da inserção.
- O uso de *heaps* corresponde ao método Heapsort.

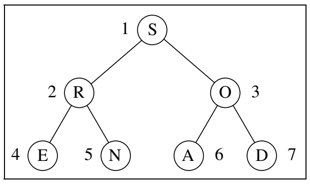
Heapsort

Heaps

- É uma seqüência de itens com chaves $c[1], c[2], \ldots, c[n]$, tal que:

$$c[i] \geq c[2i],$$
$$c[i] \geq c[2i+1],$$

  para todo $i = 1, 2, \ldots, n/2$.
- A definição pode ser facilmente visualizada em uma árvore binária completa:



- **árvore binária completa**:
  - Os nós são numerados de 1 a n.
  - O primeiro nó é chamado raiz.
  - O nó $\lfloor k/2 \rfloor$ é o pai do nó k, para $1 < k \leq n$.
  - Os nós $2k$ e $2k+1$ são os filhos à esquerda e à direita do nó k, para $1 \leq k \leq \lfloor k/2 \rfloor$.

Heapsort

Heaps

- As chaves na árvore satisfazem a condição do *heap*.
- A chave em cada nó é maior do que as chaves em seus filhos.
- A chave no nó raiz é a maior chave do conjunto.
- Uma árvore binária completa pode ser representada por um array:

1	2	3	4	5	6	7
S	*R*	*O*	*E*	*N*	*A*	*D*

- A representação é extremamente compacta.
- Permite caminhar pelos nós da árvore facilmente.
- Os filhos de um nó i estão nas posições $2i$ e $2i+1$.
- O pai de um nó i está na posição $i \operatorname{div} 2$.

Heapsort

Heaps

- Na representação do *heap* em um arranjo, a maior chave está sempre na posição 1 do vetor.
- Os algoritmos para implementar as operações sobre o *heap* operam ao longo de um dos caminhos da árvore.
- Um algoritmo elegante para construir o *heap* foi proposto por Floyd em 1964.
- O algoritmo não necessita de nenhuma memória auxiliar.
- Dado um vetor $A[1], A[2], \ldots, A[n]$.
- Os itens $A[n/2+1], A[n/2+2], \ldots, A[n]$ formam um *heap*:
  - Neste intervalo não existem dois índices i e j tais que $j = 2i$ ou $j = 2i + 1$.

Heapsort

Heaps

- Algoritmo:

	1	2	3	4	5	6	7
Chaves iniciais:	*O*	*R*	*D*	*E*	*N*	*A*	*S*
Esq = 3	*O*	*R*	**S**	*E*	*N*	*A*	**D**
Esq = 2	*O*	*R*	*S*	*E*	*N*	*A*	*D*
Esq = 1	**S**	*R*	**O**	*E*	*N*	*A*	*D*

- Os itens de $A[4]$ a $A[7]$ formam um *heap*.
- O *heap* é estendido para a esquerda $(Esq = 3)$, englobando o item $A[3]$, pai dos itens $A[6]$ e $A[7]$.
- A condição de *heap* é violada:
  - O *heap* é refeito trocando os itens D e S.
- O item R é incluindo no *heap* $(Esq = 2)$, o que não viola a condição de *heap*.
- O item O é incluindo no *heap* $(Esq = 1)$.
- A Condição de *heap* violada:
  - O *heap* é refeito trocando os itens O e S, encerrando o processo.

Heapsort

Heaps

O Programa que implementa a operação que informa o item com maior chave:

```
function Max (var A: Vetor): Item;
begin
  Max := A[1];
end;
```


Heapsort

Heaps

Programa para refazer a condição de *heap*:

```
procedure Refaz (Esq, Dir: Indice; var A: Vetor);
label 999;
var i: Indice;
    j: integer;
    x: Item;
begin
  i := Esq; j := 2 * i;
  x := A[i];
  while j <= Dir do
    begin
    if j < Dir
    then if A[j].Chave < A[j + 1].Chave then j := j+1;
    if x.Chave >= A[j].Chave then goto 999;
    A[i] := A[j];
    i := j; j := 2 * i;
    end;
  999: A[i] := x;
end;
```

Heapsort

Heaps

Programa para construir o *heap*:

```
{–– Usa o procedimento Refaz––}
procedure Constroi (var A: Vetor; var n: Indice);
var Esq: Indice;
begin
  Esq := n div 2 + 1;
  while Esq > 1 do
    begin
    Esq := Esq – 1;
    Refaz (Esq, n, A);
    end;
end;
```


Heapsort

Heaps

Programa que implementa a operação de retirar o item com maior chave:

```
function RetiraMax (var A: Vetor; var n: Indice): Item;
begin
  if n < 1
  then writeln('Erro: heap vazio')
  else begin
       RetiraMax := A[1];
       A[1] := A[n];
       n := n – 1;
       Refaz (1, n, A);
       end;
end;
```


Heapsort

Heaps

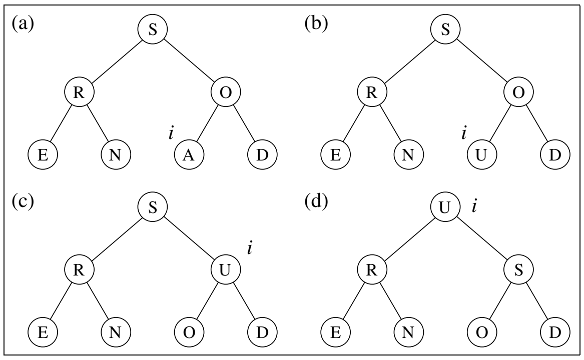
Programa que implementa a operação de aumentar o valor da chave do item i:

```
procedure AumentaChave (i: Indice; ChaveNova: ChaveTipo;
                        var A: Vetor);
var k: integer;
    x: Item;
begin
  if ChaveNova < A[i].Chave
  then writeln('Erro: ChaveNova menor que
              a chave atual')
  else begin
       A[i].Chave := ChaveNova;
       while (i>1) and (A[i div 2].Chave < A[i].Chave)
         do begin
            x := A[i div 2];
            A[i div 2] := A[i];
            A[i] := x;
            i := i div 2;
            end;
       end;
end;
```


Heapsort

Heaps

- Exemplo da operação de aumentar o valor da chave do item na posição i:



- O tempo de execução do procedimento AumentaChave em um item do *heap* é $O(\log n)$.

Heapsort

Heaps

Programa que implementa a operação de inserir um novo item no *heap*:

```
const Infinito = MaxInt;
procedure Insere (var x: Item; var A: Vetor; var n: Indice);
begin
  n := n + 1;
  A[n] := x;
  A[n].Chave := −Infinito;
  AumentaChave(n, x.Chave, A);
end;
```


Heapsort

- Algoritmo:
  1. Construir o *heap*.
  2. Troque o item na posição 1 do vetor (raiz do *heap*) com o item da posição n.
  3. Use o procedimento Refaz para reconstituir o *heap* para os itens $A[1], A[2], \ldots, A[n-1]$.
  4. Repita os passos 2 e 3 com os $n-1$ itens restantes, depois com os $n-2$, até que reste apenas um item.

Heapsort

- Exemplo de aplicação do Heapsort:

1	2	3	4	5	6	7
S	*R*	*O*	*E*	*N*	*A*	*D*
R	**N**	*O*	*E*	**D**	*A*	**S**
O	*N*	**A**	*E*	*D*	*R*	
N	**E**	*A*	**D**	*O*		
E	**D**	*A*	*N*			
D	**A**	*E*				
A	*D*					

- O caminho seguido pelo procedimento Refaz para reconstituir a condição do *heap* está em negrito.
- Por exemplo, após a troca dos itens S e D na segunda linha da Figura, o item D volta para a posição 5, após passar pelas posições 1 e 2.

Heapsort

Programa que mostra a implementação do Heapsort:

```
procedure Heapsort (var A: Vetor; var n: Indice);
var Esq, Dir: Indice;
    x       : Item;
{-- Entra aqui o procedimento Refaz--}
{-- Entra aqui o procedimento Constroi--}
begin
  Constroi(A, n);  { constroi o heap }
  Esq := 1;  Dir := n;
  while Dir > 1 do  { ordena o vetor }
    begin
    x := A[1];  A[1] := A[Dir];  A[Dir] := x;
    Dir := Dir − 1;
    Refaz (Esq, Dir, A);
    end;
end;
```

Análise

- O procedimento Refaz gasta cerca de $\log n$ operações, no pior caso.
- Logo, Heapsort gasta um tempo de execução proporcional a $n \log n$, no pior caso.

Heapsort

- Vantagens:
  - O comportamento do Heapsort é sempre $O(n \log n)$, qualquer que seja a entrada.
- Desvantagens:
  - O anel interno do algoritmo é bastante complexo se comparado com o do Quicksort.
  - O Heapsort não é **estável**.
- Recomendado:
  - Para aplicações que não podem tolerar eventualmente um caso desfavorável.
  - Não é recomendado para arquivos com poucos registros, por causa do tempo necessário para construir o *heap*.

Comparação entre os Métodos

Complexidade:

	Complexidade
Inserção	$O(n^2)$
Seleção	$O(n^2)$
Shellsort	$O(n \log n)$
Quicksort	$O(n \log n)$
Heapsort	$O(n \log n)$

- Apesar de não se conhecer analiticamente o comportamento do Shellsort, ele é considerado um método eficiente).

Comparação entre os Métodos

Tempo de execuĞČo:

- Oservação: O método que levou menos tempo real para executar recebeu o valor 1 e os outros receberam valores relativos a ele.
- Registros na ordem aleatória:

	5.00	5.000	10.000	30.000
Inserção	11,3	87	161	–
Seleção	16,2	124	228	–
Shellsort	1,2	1,6	1,7	2
Quicksort	1	1	1	1
Heapsort	1,5	1,6	1,6	1,6

- Registros na ordem ascendente:

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	1	1	1	1
Seleção	128	1.524	3.066	–
Shellsort	3,9	6,8	7,3	8,1
Quicksort	4,1	6,3	6,8	7,1
Heapsort	12,2	20,8	22,4	24,6

Comparação entre os Métodos

Tempo de execuĞČo:

- Registros na ordem descendente:

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	40,3	305	575	–
Seleção	29,3	221	417	–
Shellsort	1,5	1,5	1,6	1,6
Quicksort	1	1	1	1
Heapsort	2,5	2,7	2,7	2,9

Comparação entre os Métodos

Observações sobre os métodos:

1. Shellsort, Quicksort e Heapsort têm a mesma ordem de grandeza.
2. O Quicksort é o mais rápido para todos os tamanhos aleatórios experimentados.
3. A relação Heapsort/Quicksort se mantém constante para todos os tamanhos.
4. A relação Shellsort/Quicksort aumenta à medida que o número de elementos aumenta.
5. Para arquivos pequenos (500 elementos), o Shellsort é mais rápido que o Heapsort.
6. Quando o tamanho da entrada cresce, o Heapsort é mais rápido que o Shellsort.
7. O Inserção é o mais rápido para qualquer tamanho se os elementos estão ordenados.
8. O Inserção é o mais lento para qualquer tamanho se os elementos estão em ordem descendente.
9. Entre os algoritmos de custo $O(n^2)$, o Inserção é melhor para todos os tamanhos aleatórios experimentados.

Comparação entre os Métodos

Influência da ordem inicial do registros:

	Shellsort			Quicksort			Heapsort		
	5.000	10.000	30.000	5.000	10.000	30.000	5.000	10.000	30.000
Asc	1	1	1	1	1	1	1,1	1,1	1,1
Des	1,5	1,6	1,5	1,1	1,1	1,1	1	1	1
Ale	2,9	3,1	3,7	1,9	2,0	2,0	1,1	1	1

1. O Shellsort é bastante sensível à ordenação ascendente ou descendente da entrada.
2. Em arquivos do mesmo tamanho, o Shellsort executa mais rápido para arquivos ordenados.
3. O Quicksort é sensível à ordenação ascendente ou descendente da entrada.
4. Em arquivos do mesmo tamanho, o Quicksort executa mais rápido para arquivos ordenados.
5. O Quicksort é o mais rápido para qualquer tamanho para arquivos na ordem ascendente.
6. O Heapsort praticamente não é sensível à ordenação da entrada.

Comparação entre os Métodos

Método da Inserção:

- É o mais interessante para arquivos com menos do que 20 elementos.
- O método é estável.
- Possui comportamento melhor do que o método da **bolha (Bubblesort)** que também é estável.
- Sua implementação é tão simples quanto as implementações do Bubblesort e Seleção.
- Para arquivos já ordenados, o método é $O(n)$.
- O custo é linear para adicionar alguns elementos a um arquivo já ordenado.

Comparação entre os Métodos

Método da Seleção:

- É vantajoso quanto ao número de movimentos de registros, que é $O(n)$.
- Deve ser usado para arquivos com registros muito grandes, desde que o tamanho do arquivo não exceda 1.000 elementos.

Comparação entre os Métodos

Shellsort:

- É o método a ser escolhido para a maioria das aplicações por ser muito eficiente para arquivos de tamanho moderado.
- Mesmo para arquivos grandes, o método é cerca de apenas duas vezes mais lento do que o Quicksort.
- Sua implementação é simples e geralmente resulta em um programa pequeno.
- Não possui um pior caso ruim e quando encontra um arquivo parcialmente ordenado trabalha menos.

Comparação entre os Métodos

Quicksort:

- É o algoritmo mais eficiente que existe para uma grande variedade de situações.
- É um método bastante frágil no sentido de que qualquer erro de implementação pode ser difícil de ser detectado.
- O algoritmo é recursivo, o que demanda uma pequena quantidade de memória adicional.
- Seu desempenho é da ordem de $O(n^2)$ operações no pior caso.
- O principal cuidado a ser tomado é com relação à escolha do pivô.
- A escolha do elemento do meio do arranjo melhora muito o desempenho quando o arquivo está total ou parcialmente ordenado.
- O pior caso tem uma probabilidade muito remota de ocorrer quando os elementos forem aleatórios.

Comparação entre os Métodos

Quicksort:

- Geralmente se usa a mediana de uma amostra de três elementos para evitar o pior caso.
- Esta solução melhora o caso médio ligeiramente.
- Outra importante melhoria para o desempenho do Quicksort é evitar chamadas recursivas para pequenos subarquivos.
- Para isto, basta chamar um método de ordenação simples nos arquivos pequenos.
- A melhoria no desempenho é significativa, podendo chegar a 20% para a maioria das aplicações (Sedgewick, 1988).

Comparação entre os Métodos

Heapsort:

- É um método de ordenação elegante e eficiente.
- Apesar de ser cerca de duas vezes mais lento do que o Quicksort, não necessita de nenhuma memória adicional.
- Executa sempre em tempo proporcional a $n \log n$,
- Aplicações que não podem tolerar eventuais variações no tempo esperado de execução devem usar o Heapsort.

Comparação entre os Métodos

Considerações finais:

- Para registros muito grandes é desejável que o método de ordenação realize apenas n movimentos dos registros.
- Com o uso de uma **ordenação indireta** é possível se conseguir isso.
- Suponha que o arquivo A contenha os seguintes registros: $A[1], A[2], \ldots, A[n]$.
- Seja P um arranjo $P[1], P[2], \ldots, P[n]$ de apontadores.
- Os registros somente são acessados para fins de comparações e toda movimentação é realizada sobre os apontadores.
- Ao final, $P[1]$ contém o índice do menor elemento de A, $P[2]$ o índice do segundo menor e assim sucessivamente.
- Essa estratégia pode ser utilizada para qualquer dos métodos de ordenação interna.

Ordenação Parcial

- Consiste em obter os k primeiros elementos de um arranjo ordenado com n elementos.
- Quando $k = 1$, o problema se reduz a encontrar o mínimo (ou o máximo) de um conjunto de elementos.
- Quando $k = n$ caímos no problema clássico de ordenação.

Ordenação Parcial

Aplicações:

- Facilitar a busca de informação na Web com as **máquinas de busca**:
  - É comum uma consulta na Web retornar centenas de milhares de documentos relacionados com a consulta.
  - O usuário está interessado apenas nos k documentos mais relevantes.
  - Em geral k é menor do que 200 documentos.
  - Normalmente são consultados apenas os dez primeiros.
  - Assim, são necessários algoritmos eficientes de ordenação parcial.

Ordenação Parcial

Algoritmos considerados:

- Seleção parcial.
- Inserção parcial.
- Heapsort parcial.
- Quicksort parcial.

Seleção Parcial

- Um dos algoritmos mais simples.
- Princípio de funcionamento:
  - Selecione o menor item do vetor.
  - Troque-o com o item que está na primeira posição do vetor.
  - Repita estas duas operações com os itens $n-1, n-2 \ldots n-k$.

Seleção Parcial

```
procedure SelecaoParcial (var A:Vetor; var n, k:Indice);
var i, j, Min: Indice;
    x        : Item;
begin
for i := 1 to k do
  begin
  Min := i;
  for j := i + 1 to n do
    if A[j].Chave < A[Min].Chave then Min := j;
  x := A[Min]; A[Min] := A[i]; A[i] := x;
  end;
end;
```

Análise:

- Comparações entre chaves e movimentações de registros:

$$C(n) = kn - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}$$

$$M(n) = 3k$$

Seleção Parcial

- É muito simples de ser obtido a partir da implementação do algoritmo de ordenação por seleção.
- Possui um comportamento espetacular quanto ao número de movimentos de registros:
  - Tempo de execução é linear no tamanho de k.

Inserção Parcial

- Pode ser obtido a partir do algoritmo de ordenação por Inserção por meio de uma modificação simples:
  - Tendo sido ordenados os primeiros k itens, o item da k-ésima posição funciona como um pivô.
  - Quando um item entre os restantes é menor do que o pivô, ele é inserido na posição correta entre os k itens de acordo com o algoritmo original.

Inserção Parcial

```
procedure InsercaoParcial (var A:Vetor;var n, k:Indice);
{-- Nao preserva o restante do vetor --}
var i, j: Indice; x: Item;
begin
for i := 2 to n do
  begin
  x := A[i];
  if i > k then j := k else j := i - 1;
  A[0] := x; { sentinela }
  while x.Chave < A[j].Chave do
    begin A[j + 1] := A[j]; j := j - 1; end;
  A[j+1] := x;
  end;
end;
```

Obs:

1. A modificação realizada verifica o momento em que i se torna maior do que k e então passa a considerar o valor de j igual a k a partir deste ponto.
2. O algoritmo não preserva o restante do vetor não.

Inserção Parcial

Algoritmo de Inserção Parcial que preserva o restante do vetor:

```
procedure InsercaoParcial2(var A:Vetor;var n, k:Indice);
{-- Preserva o restante do vetor --}
var i, j: Indice; x: Item;
begin
for i := 2 to n do
  begin
  x := A[i];
  if i > k
  then begin
       j := k;
       if x.Chave < A[k].Chave then A[i] := A[k];
       end
  else j := i - 1;
  A[0] := x; { sentinela }
  while x.Chave < A[j].Chave do
    begin
    if j < k then A[j + 1] := A[j];
    j := j - 1;
    end;
  if j < k then A[j+1] := x;
  end;
end;
```


Inserção Parcial

Análise:

- No anel mais interno, na i-ésima iteração o valor de C_i é:

$$\begin{array}{ll} \text{melhor caso} & : C_i(n) = 1 \\ \text{pior caso} & : C_i(n) = i \\ \text{caso médio} & : C_i(n) = \frac{1}{i}(1 + 2 + \cdots + i) = \frac{i+1}{2} \end{array}$$

- Assumindo que todas as permutações de n são igualmente prováveis, o número de comparações é:

$$\begin{array}{lll} \text{melhor caso} & : C(n) & = (1 + 1 + \cdots + 1) = n - 1 \\ \text{pior caso} & : C(n) & = (2 + 3 + \cdots + k + (k+1)(n-k)) \\ & & = kn + n - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - 1 \\ \text{caso médio} & : C(n) & = \frac{1}{2}(3 + 4 + \cdots + k + 1 + (k+1)(n-k)) \\ & & = \frac{kn}{2} + \frac{n}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{k}{4} - 1 \end{array}$$

Inserção Parcial

Análise:

- O número de movimentações na i-ésima iteração é:

$$M_i(n) = C_i(n) - 1 + 3 = C_i(n) + 2$$

- Logo, o número de movimentos é:

$$\begin{array}{lll} \text{melhor caso} & : M(n) & = (3 + 3 + \cdots + 3) = 3(n-1) \\ \text{pior caso} & : M(n) & = (4 + 5 + \cdots + k + 2 + (k+1)(n-k)) \\ & & = kn + n - \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} - 3 \\ \text{caso médio} & : M(n) & = \frac{1}{2}(5 + 6 + \cdots + k + 3 + (k+1)(n-k)) \\ & & = \frac{kn}{2} + \frac{n}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{5k}{4} - 2 \end{array}$$

- O número mínimo de comparações e movimentos ocorre quando os itens estão originalmente em ordem.
- O número máximo ocorre quando os itens estão originalmente na ordem reversa.

Heapsort Parcial

- Utiliza um tipo abstrato de dados *heap* para informar o menor item do conjunto.
- Na primeira iteração, o menor item que está em a[1] (raiz do *heap*) é trocado com o item que está em A[n].
- Em seguida o *heap* é refeito.
- Novamente, o menor está em A[1], troque-o com A[n-1].
- Repita as duas últimas operações até que o k-ésimo menor seja trocado com A[$n - k$].
- Ao final, os k menores estão nas k últimas posições do vetor A.

Heapsort Parcial

```
procedure HeapsortParcial(var A:Vetor;var n,k:Indice);
{-- Coloca menor em A[n], segundo em A[n-1],
    ..., k-esimo em A[n-k] --}
var Esq, Dir: Indice;
    x       : Item;
    Aux     : integer;
{-- Entram aqui os procedimentos Refaz e Constroi--}
begin
  Constroi(A, n);  { constroi o heap }
  Aux := 0; Esq := 1; Dir := n;
  while Aux < k do  { ordena o vetor }
    begin
    x := A[1]; A[1] := A[n - Aux]; A[n - Aux] := x;
    Dir := Dir - 1; Aux := Aux + 1;
    Refaz (Esq, Dir, A);
    end;
end;
```


Heapsort Parcial

Análise:

- O HeapsortParcial deve construir um *heap* a um custo $O(n)$.
- O procedimento Refaz tem custo $O(\log n)$.
- O procedimento HeapsortParcial chama o procedimento Refaz k vezes.
- Logo, o algoritmo apresenta a complexidade:

$$O(n + k \log n) = \begin{cases} O(n) & \text{se } k \le \frac{n}{\log n} \\ O(k \log n) & \text{se } k > \frac{n}{\log n} \end{cases}$$

Quicksort Parcial

- Assim como o Quicksort, o Quicksort Parcial é o algoritmo de ordenação parcial mais rápido em várias situações.
- A alteração no algoritmo para que ele ordene apenas os k primeiros itens dentre n itens é muito simples.
- Basta abandonar a partição à direita toda vez que a partição à esquerda contiver k ou mais itens.
- Assim, a única alteração necessária no Quicksort é evitar a chamada recursiva Ordena(i,Dir).

Quicksort Parcial

Chaves iniciais:	*O*	*R*	*D*	*E*	*N*	*A*
1	*A*	**D**	*R*	*E*	*N*	*O*
2	**A**	*D*				
3			**E**	*R*	*N*	*O*
4				**N**	*R*	*O*
5					*O*	**R**
	A	*D*	*E*	*N*	*O*	*R*

- Considere $k = 3$ e D o pivô para gerar as linhas 2 e 3.
- A partição à esquerda contém dois itens e a partição à direita contém quatro itens.
- A partição à esquerda contém menos do que k itens.
- Logo, a partição direita não pode ser abandonada.
- Considere E o pivô na linha 3.
- A partição à esquerda contém três itens e a partição à direita também.
- Assim, a partição à direita pode ser abandonada.

Quicksort Parcial

```
procedure QuickSortParcial(var A:Vetor;var n,k:Indice);
{-- Entra aqui o procedimento Particao--}
  procedure Ordena (Esq, Dir, k: Indice);
  var i, j: Indice;
  begin
    particao (Esq, Dir, i, j);
    if (j-Esq) >= (k-1)
    then begin
         if Esq < j then Ordena (Esq, j, k)
         end
    else begin
         if Esq < j then Ordena (Esq, j, k);
         if i < Dir then Ordena (i, Dir, k);
         end;
  end; { Ordena }
begin
  Ordena (1, n, k);
end;
```


Quicksort Parcial

Análise:

- A análise do Quicksort é difícil.
- O comportamento é muito sensível à escolha do pivô.
- Podendo cair no melhor caso $O(k \log k)$.
- Ou em algum valor entre o melhor caso e $O(n \log n)$.

Comparação entre os Métodos de Ordenação Parcial

n, k	Seleção	Quicksort	Inserção	Inserção2	Heapsort
$n: 10^1 \quad k: 10^0$	1	2,5	1	1,2	1,7
$n: 10^1 \quad k: 10^1$	1,2	2,8	1	1,1	2,8
$n: 10^2 \quad k: 10^0$	1	3	1,1	1,4	4,5
$n: 10^2 \quad k: 10^1$	1,9	2,4	1	1,2	3
$n: 10^2 \quad k: 10^2$	3	1,7	1	1,1	2,3
$n: 10^3 \quad k: 10^0$	1	3,7	1,4	1,6	9,1
$n: 10^3 \quad k: 10^1$	4,6	2,9	1	1,2	6,4
$n: 10^3 \quad k: 10^2$	11,2	1,3	1	1,4	1,9
$n: 10^3 \quad k: 10^3$	15,1	1	3,9	4,2	1,6
$n: 10^5 \quad k: 10^0$	1	2,4	1,1	1,1	5,3
$n: 10^5 \quad k: 10^1$	5,9	2,2	1	1	4,9
$n: 10^5 \quad k: 10^2$	67	2,1	1	1,1	4,8
$n: 10^5 \quad k: 10^3$	304	1	1,1	1,3	2,3
$n: 10^5 \quad k: 10^4$	1445	1	33,1	43,3	1,7
$n: 10^5 \quad k: 10^5$	∞	1	∞	∞	1,9
$n: 10^6 \quad k: 10^0$	1	3,9	1,2	1,3	8,1
$n: 10^6 \quad k: 10^1$	6,6	2,7	1	1	7,3
$n: 10^6 \quad k: 10^2$	83,1	3,2	1	1,1	6,6
$n: 10^6 \quad k: 10^3$	690	2,2	1	1,1	5,7
$n: 10^6 \quad k: 10^4$	∞	1	5	6,4	1,9
$n: 10^6 \quad k: 10^5$	∞	1	∞	∞	1,7
$n: 10^6 \quad k: 10^6$	∞	1	∞	∞	1,8
$n: 10^7 \quad k: 10^0$	1	3,4	1,1	1,1	7,4
$n: 10^7 \quad k: 10^1$	8,6	2,6	1	1,1	6,7
$n: 10^7 \quad k: 10^2$	82,1	2,6	1	1,1	6,8
$n: 10^7 \quad k: 10^3$	∞	3,1	1	1,1	6,6
$n: 10^7 \quad k: 10^4$	∞	1,1	1	1,2	2,6
$n: 10^7 \quad k: 10^5$	∞	1	∞	∞	2,2
$n: 10^7 \quad k: 10^6$	∞	1	∞	∞	1,2
$n: 10^7 \quad k: 10^7$	∞	1	∞	∞	1,7

Comparação entre os Métodos de Ordenação Parcial

1. Para valores de k até 1.000, o método da InserçãoParcial é imbatível.
2. O QuicksortParcial nunca ficar muito longe da InserçãoParcial.
3. Na medida em que o k cresce,o QuicksortParcial é a melhor opção.
4. Para valores grandes de k, o método da InserçãoParcial se torna ruim.
5. Um método indicado para qualquer situação é o QuicksortParcial.
6. O HeapsortParcial tem comportamento parecido com o do QuicksortParcial.
7. No entano, o HeapsortParcial é mais lento.

Ordenação Externa

- A ordenação externa consiste em ordenar arquivos de tamanho maior que a memória interna disponível.
- Os métodos de ordenação externa são muito diferentes dos de ordenação interna.
- Na ordenação externa os algoritmos devem diminuir o número de acesso as unidades de memória externa.
- Nas memórias externas, os dados são armazenados como um arquivo seqüencial.
- Apenas um registro pode ser acessado em um dado momento.
- Esta é uma restrição forte se comparada com as possibilidades de acesso em um vetor.
- Logo, os métodos de ordenação interna são inadequados para ordenação externa.
- Técnicas de ordenação completamente diferentes devem ser utilizadas.

Ordenação Externa

Fatores que determinam as diferenças das técnicas de ordenação externa:

1. Custo para acessar um item é algumas ordens de grandeza maior.
2. O custo principal na ordenação externa é relacionado a transferência de dados entre a memória interna e externa.
3. Existem restrições severas de acesso aos dados.
4. O desenvolvimento de métodos de ordenação externa é muito dependente do estado atual da tecnologia.
5. A variedade de tipos de unidades de memória externa torna os métodos dependentes de vários parâmetros.
6. Assim, apenas métodos gerais serão apresentados.

Ordenação Externa

- O método mais importante é o de ordenação por intercalação.
- Intercalar significa combinar dois ou mais blocos ordenados em um único bloco ordenado.
- A intercalação é utilizada como uma operação auxiliar na ordenação.
- Estratégia geral dos métodos de ordenação externa:
  1. Quebre o arquivo em blocos do tamanho da memória interna disponível.
  2. Ordene cada bloco na memória interna.
  3. Intercale os blocos ordenados, fazendo várias passadas sobre o arquivo.
  4. A cada passada são criados blocos ordenados cada vez maiores, até que todo o arquivo esteja ordenado.

Ordenação Externa

- Os algoritmos para ordenação externa devem reduzir o número de passadas sobre o arquivo.
- Uma boa medida de complexidade de um algoritmo de ordenação por intercalação é o número de vezes que um item é lido ou escrito na memória auxiliar.
- Os bons métodos de ordenação geralmente envolvem no total menos do que dez passadas sobre o arquivo.

Intercalação Balanceada de Vários Caminhos

- Considere um arquivo armazenado em uma fita de entrada:

  I N T E R C A L A C A O B A L A N C E A D A

- Objetivo:
  - Ordenar os 22 registros e colocá-los em uma fita de saída.
- Os registros são lidos um após o outro.
- Considere uma memória interna com capacidade para para três registros.
- Considere que esteja disponível seis unidades de fita magnética.

Intercalação Balanceada de Vários Caminhos

- Fase de criação dos blocos ordenados:

fita 1:	*I N T*	*A C O*	*A D E*
fita 2:	*C E R*	*A B L*	*A*
fita 3:	*A A L*	*A C N*	

Intercalação Balanceada de Vários Caminhos

- Fase de intercalação - Primeira passada:
  1. O primeiro registro de cada fita é lido.
  2. Retire o registro contendo a menor chave.
  3. Armazene-o em uma fita de saída.
  4. Leia um novo registro da fita de onde o registro retirado é proveniente.
  5. Ao ler o terceiro registro de um dos blocos, sua fita fica inativa.
  6. A fita é reativada quando o terceiro registro das outras fitas forem lidos.
  7. Neste instante um bloco de nove registros ordenados foi formado na fita de saída.
  8. Repita o processo para os blocos restantes.
- Resultado da primeira passada da segunda etapa:

fita 4:	*A A C E I L N R T*
fita 5:	*A A A B C C L N O*
fita 6:	*A A D E*

Intercalação Balanceada de Vários Caminhos

- Quantas passadas são necessárias para ordenar um arquivo de tamanho arbitrário?
  - Seja n, o número de registros do arquivo.
  - Suponha que cada registro ocupa m palavras na memória interna.
  - A primeira etapa produz n/m blocos ordenados.
  - Seja $P(n)$ o número de passadas para a fase de intercalação.
  - Seja f o número de fitas utilizadas em cada passada.
  - Assim:
  $$P(n) = \log_f \frac{n}{m}.$$
  No exemplo acima, n=22, m=3 e f=3 temos:
  $$P(n) = \log_3 \frac{22}{3} = 2.$$

Intercalação Balanceada de Vários Caminhos

- No exemplo foram utilizadas $2f$ fitas para uma intercalação-de-f-caminhos.
- É possível usar apenas $f + 1$ fitas:
  - Encaminhe todos os blocos para uma única fita.
  - Redistribuia estes blocos entre as fitas de onde eles foram lidos.
  - O custo envolvido é uma passada a mais em cada intercalação.
- No caso do exemplo de 22 registros, apenas quatro fitas seriam suficientes:
  - A intercalação dos blocos a partir das fitas 1, 2 e 3 seria toda dirigida para a fita 4.
  - Ao final, o segundo e o terceiro blocos ordenados de nove registros seriam transferidos de volta para as fitas 1 e 2.

Implementação por meio de Seleção por Substituição

- A implementação do método de intercalação balanceada pode ser realizada utilizando filas de prioridades.
- As duas fases do método podem ser implementadas de forma eficiente e elegante.
- Operações básicas para formar blocos ordenados:
  - Obter o menor dentre os registros presentes na memória interna.
  - Substituí-lo pelo próximo registro da fita de entrada.
- Estrutura ideal para implementar as operações: *heap*.
- Operação de substituição:
  - Retirar o menor item da fila de prioridades.
  - Colocar um novo item no seu lugar.
  - Reconstituir a propriedade do *heap*.

Implementação por meio de Seleção por Substituição

Algoritmo:

1. Inserir m elementos do arquivo na fila de prioridades.
2. Substituir o menor item da fila de prioridades pelo próximo item do arquivo.
3. Se o próximo item é menor do que o que saiu, então:
   - Considere-o membro do próximo bloco.
   - Trate-o como sendo maior do que todos os itens do bloco corrente.
4. Se um item marcado vai para o topo da fila de prioridades então:
   - O bloco corrente é encerrado.
   - Um novo bloco ordenado é iniciado.

Implementação por meio de Seleção por Substituição

Primeira passada sobre o arquivo exemplo:

Entra	1	2	3
E	*I*	*N*	*T*
R	*N*	*E**	*T*
C	*R*	*E**	*T*
A	*T*	*E**	*C**
L	*A**	*E**	*C**
A	*C**	*E**	*L**
C	*E**	*A*	*L**
A	*L**	*A*	*C*
O	*A*	*A*	*C*
B	*A*	*O*	*C*
A	*B*	*O*	*C*
L	*C*	*O*	*A**
A	*L*	*O*	*A**
N	*O*	*A**	*A**
C	*A**	*N**	*A**
E	*A**	*N**	*C**
A	*C**	*N**	*E**
D	*E**	*N**	*A*
A	*N**	*D*	*A*
	A	*D*	*A*
	A	*D*	
	D		

Os asteriscos indicam quais chaves pertencem a blocos diferentes.

Implementação por meio de Seleção por Substituição

- Tamanho dos blocos produzidas para chaves randômicas:
  - Os blocos ordenados são cerca de duas vezes o tamanho dos blocos criados pela ordenação interna.
- Isso pode salvar uma passada na fase de intercalação.
- Se houver alguma ordem nas chaves, os blocos ordenados podem ser ainda maiores.
- Se nenhuma chave possui mais do que m chaves maiores do que ela, o arquivo é ordenado em um passo.
- Exemplo para as chaves RAPAZ:

Entra	1	2	3
A	*A*	*R*	*P*
Z	*A*	*R*	*P*
	P	*R*	*Z*
	R	*Z*	
	Z		

Implementação por meio de Seleção por Substituição

- Fase de intercalação dos blocos ordenados obtidos na primeira fase:
  - Operação básica: obter o menor item dentre os ainda não retirados dos f blocos a serem intercalados.

Algoritmo:

- Monte uma fila de prioridades de tamanho f.
- A partir de cada uma das f entradas:
  - Substitua o item no topo da fila de prioridades pelo próximo item do mesmo bloco do item que está sendo substituído.
  - Imprima em outra fita o elemento substituído.

Implementação por meio de Seleção por Substituição

- Exemplo:

Entra	1	2	3
A	*A*	*C*	*I*
L	*A*	*C*	*I*
E	*C*	*L*	*I*
R	*E*	*L*	*I*
N	*I*	*L*	*R*
	L	*N*	*R*
T	*N*	*R*	
	R	*T*	
	T		

- Para f pequeno não é vantajoso utilizar seleção por substituição para intercalar blocos:
  - Obtém-se o menor item fazendo $f - 1$ comparações.
- Quando f é 8 ou mais, o método é adequado:
  - Obtém-se o menor item fazendo $\log_2 f$ comparações.

Considerações Práticas

- As operações de entrada e saída de dados devem ser implementadas eficientemente.
- Deve-se procurar realizar a leitura, a escrita e o processamento interno dos dados de forma simultânea.
- Os computadores de maior porte possuem uma ou mais unidades independentes para processamento de entrada e saída.
- Assim, pode-se realizar processamento e operações de E/S simultaneamente.

Considerações Práticas

- Técnica para obter superposição de E/S e processamento interno:
  - Utilize $2f$ áreas de entrada e $2f$ de saída.
  - Para cada unidade de entrada ou saída, utiliza-se duas áreas de armazenamento:
    1. Uma para uso do processador central
    2. Outra para uso do processador de entrada ou saída.
  - Para entrada, o processador central usa uma das duas áreas enquanto a unidade de entrada está preenchendo a outra área.
  - Depois a utilização das áreas é invertida entre o processador de entrada e o processador central.
  - Para saída, a mesma técnica é utilizada.

Considerações Práticas

- Problemas com a técnica:
  - Apenas metade da memória disponível é utilizada.
  - Isso pode levar a uma ineficiência se o número de áreas for grande.
    Ex: Intercalação-de-f-caminhos para f grande.
  - Todas as f áreas de entrada em uma intercalação-de-f-caminhos se esvaziando aproximadamente ao mesmo tempo.

Considerações Práticas

- Solução para os problemas:
  - Técnica de previsão:
    - ∗ Requer a utilização de uma única área extra de armazenamento durante a intercalação.
    - ∗ Superpõe a entrada da próxima área que precisa ser preenchida com a parte de processamento interno do algoritmo.
    - ∗ É fácil saber qual área ficará vazia primeiro.
    - ∗ Basta olhar para o último registro de cada área.
    - ∗ A área cujo último registro é o menor, será a primeira a se esvaziar.

Considerações Práticas

- Escolha da ordem de intercalação f:
  - Para fitas magnéticas:
    - f deve ser igual ao número de unidades de fita disponíveis menos um.
    - A fase de intercalação usa f fitas de entrada e uma fita de saída.
    - O número de fitas de entrada deve ser no mínimo dois.
  - Para discos magnéticos:
    - O mesmo raciocínio acima é válido.
    - O acesso seqüencial é mais eficiente.
  - Sedegwick (1988) sugere considerar f grande o suficiente para completar a ordenação em poucos passos.
  - Porém, a melhor escolha para f depende de vários parâmetros relacionados com o sistema de computação disponível.

Intercalação Polifásica

- Problema com a intercalação balanceada de vários caminhos:
  - Necessita de um grande número de fitas.
  - Faz várias leituras e escritas entre as fitas envolvidas.
  - Para uma intercalação balanceada de f caminhos são necessárias $2f$ fitas.
  - Alternativamente, pode-se copiar o arquivo quase todo de uma única fita de saída para f fitas de entrada.
  - Isso reduz o número de fitas para $f + 1$.
  - Porém, há um custo de uma cópia adicional do arquivo.
- Solução:
  - **Intercalação polifásica**.

Intercalação Polifásica

- Os blocos ordenados são distribuídos de forma desigual entre as fitas disponíveis.
- Uma fita é deixada livre.
- Em seguida, a intercalação de blocos ordenados é executada até que uma das fitas esvazie.
- Neste ponto, uma das fitas de saída troca de papel com a fita de entrada.

Intercalação Polifásica

- Exemplo:
  - Blocos ordenados obtidos por meio de seleção por substituição:

fita 1:	*I N R T*	*A C E L*	*A A B C L O*
fita 2:	*A A C E N*	*A A D*	
fita 3:			

  - Configuração após uma intercalação-de-2-caminhos das fitas 1 e 2 para a fita 3:

fita 1:	*A A B C L O*	
fita 2:		
fita 3:	*A A C E I N N R T*	*A A A C D E L*

Intercalação Polifásica

- Exemplo:
  - Depois da intercalação-de-2-caminhos das fitas 1 e 3 para a fita 2:

fita 1:	
fita 2:	*A A A A B C C E I L N N O R T*
fita 3:	*A A A C D E L*

  - Finalmente:

fita 1:	*A A A A A A A B C C C D E E I L L N N O R T*
fita 2:	
fita 3:	

  - A intercalação é realizada em muitas fases.
  - As fases não envolvem todos os blocos.
  - Nenhuma cópia direta entre fitas é realizada.

Intercalação Polifásica

- A implementação da intercalação polifásica é simples.
- A parte mais delicada está na distribuição inicial dos blocos ordenados entre as fitas.
- Distribuição dos blocos nas diversas etapas do exemplo:

fita 1	fita 2	fita 3	Total
3	2	0	5
1	0	2	3
0	1	1	2
1	0	0	1

Intercalação Polifásica

Análise:

- A análise da intercalação polifásica é complicada.
- O que se sabe é que ela é ligeiramente melhor do que a intercalação balanceada para valores pequenos de f.
- Para valores de $f > 8$, a intercalação balanceada pode ser mais rápida.

Quicksort Externo

- Foi proposto por Monard em 1980.
- Utiliza o paradigma de **divisão e conquista**.
- O algoritmo ordena ***in situ*** um arquivo $A = \{R_1, \ldots, R_n\}$ de n registros.
- Os registros estão armazenados consecutivamente em memória secundária de acesso randômico.
- O algoritmo utiliza somente $O(\log n)$ unidades de memória interna e não é necessária nenhuma memória externa adicional.

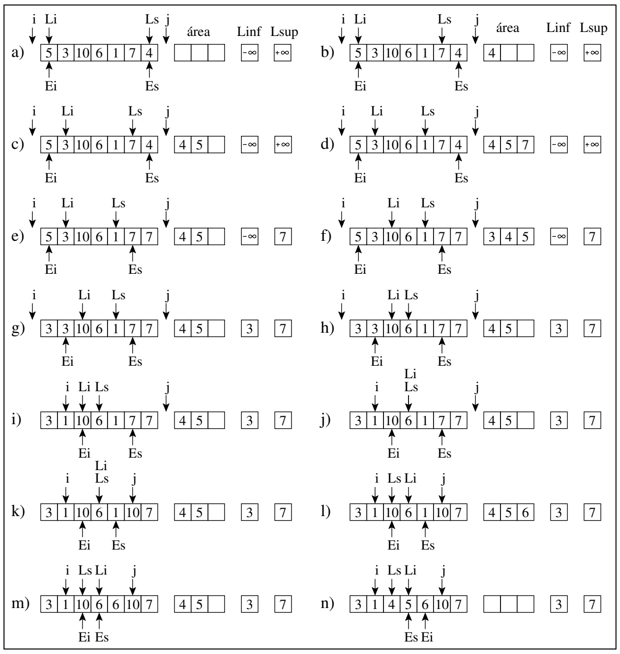
Quicksort Externo

- Seja R_i, $1 \leq i \leq n$, o registro que se encontra na i-ésima posição de A.
- Algoritmo:
  1. Particionar A da seguinte forma: $\{R_1, \ldots, R_i\} \leq R_{i+1} \leq R_{i+2} \leq \ldots \leq R_{j-2} \leq R_{j-1} \leq \{R_j, \ldots, R_n\}$,
  2. chamar recursivamente o algoritmo em cada um dos subarquivos $A_1 = \{R_1, \ldots, R_i\}$ e $A_2 = \{R_j, \ldots, R_n\}$.

Quicksort Externo

- Para o partionamento é utilizanda uma área de armazenamento na memória interna.
- Tamanho da área: $\mathrm{TamArea} = j - i - 1$, com $\mathrm{TamArea} \geq 3$.
- Nas chamadas recusivas deve-se considerar que:
  - Primeiro deve ser ordenado o subarquivo de menor tamanho.
  - Condição para que, na média, $O(\log n)$ subarquivos tenham o processamento adiado.
  - Subarquivos vazios ou com um único registro são ignorados.
  - Caso o arquivo de entrada A possua no máximo $\mathrm{TamArea}$ registros, ele é ordenado em um único passo.

Quicksort Externo



Quicksort Externo

```
procedure QuicksortExterno (var ArqLi, ArqEi, ArqLEs: TipoArq;
                            Esq, Dir: integer);
var
  i    : integer; j    : integer;
  Area: TipoArea; { Area de armazenamento interna}
begin
  if Dir − Esq >= 1
  then begin
       FAVazia (Area);
       Particao (ArqLi, ArqEi, ArqLEs, Area, Esq,
                 Dir, i, j);
       if i − Esq < Dir − j
       then begin {ordene primeiro o subarquivo menor}
            QuicksortExterno (ArqLi, ArqEi, ArqLEs, Esq, i);
            QuicksortExterno (ArqLi, ArqEi, ArqLEs, j, Dir);
            end
       else begin
            QuicksortExterno (ArqLi, ArqEi, ArqLEs, j, Dir);
            QuicksortExterno (ArqLi, ArqEi, ArqLEs, Esq, i);
            end;
       end;
end;
```

Quicksort Externo

Procedimentos auxiliares utilizados pelo procedimento Particao:

```
procedure LeSup (var ArqLEs: TipoArq; var UltLido: TipoRegistro;
                 var Ls: Integer; var OndeLer: Boolean);
begin
  seekUpdate (ArqLEs, Ls − 1);
  read (ArqLEs, UltLido);
  Ls := Ls − 1;
  OndeLer := false;
end;
procedure LeInf (var ArqLi: TipoArq; var UltLido: TipoRegistro;
                 var Li: Integer; var OndeLer: Boolean);
begin
  read (ArqLi, UltLido);
  Li := Li + 1;
  OndeLer := true;
end;

procedure InserirArea (var Area: TipoArea;var UltLido:TipoRegistro;
                       var NRArea: Integer );
begin {Insere UltLido de forma ordenada na Area}
  InsereItem (UltLido, Area);
  NRArea := ObterNumCelOcupadas (Area);
end;
```


Quicksort Externo

Procedimentos auxiliares utilizados pelo procedimento Particao:

```
procedure EscreveMin (var ArqEi: TipoArq; R: TipoRegistro;
                      var Ei: Integer);
begin
  write (ArqEi, R);
  Ei := Ei + 1;
end;

procedure RetiraMax (var Area: TipoArea; var R: TipoRegistro;
                     var NRArea: Integer );
begin
  RetiraUltimo (Area, R);
  NRArea := ObterNumCelOcupadas (Area);
end;

procedure RetiraMin (var Area: TipoArea; var R: TipoRegistro;
                     var NRArea: Integer );
begin
  RetiraPrimeiro (Area, R);
  NRArea := ObterNumCelOcupadas (Area);
end;

procedure EscreveMax (var ArqLEs: TipoArq; R: TipoRegistro;
                      var Es: Integer);
begin
  seekUpdate(ArqLEs, Es − 1);
  write(ArqLEs, R);
  Es := Es − 1;
end;
```


Quicksort Externo

Procedimento Particao:

```
procedure Particao (var ArqLi, ArqEi, ArqLEs: TipoArq;
                    Area: TipoArea; Esq, Dir: integer;
                    var i, j: integer);
var Ls, Es, Li, Ei, NRArea, Linf, Lsup: integer;
    UltLido, R: TipoRegistro;
    OndeLer: boolean;
begin
  Ls := Dir; Es := Dir; Li := Esq; Ei := Esq;
  Linf := −MaxInt; Lsup := MaxInt; NRArea := 0;
  OndeLer := true;
  seekUpdate (ArqLi, Li − 1); seekUpdate (ArqEi,Ei − 1);
  i := Esq − 1; j := Dir + 1;
  while (Ls >= Li) do
    begin
    if NRArea < TamArea − 1
    then begin
         if OndeLer
         then LeSup (ArqLEs, UltLido, Ls, OndeLer)
         else LeInf (ArqLi, UltLido, Li, OndeLer);
         InserirArea (Area, UltLido, NRArea);
         end
    else begin
         if Ls = Es
         then LeSup (ArqLEs, UltLido, Ls, OndeLer)
         else if Li = Ei
              then LeInf (ArqLi, UltLido, Li, OndeLer)
              else if OndeLer
                   then LeSup (ArqLEs, UltLido, Ls, OndeLer)
                   else LeInf (ArqLi, UltLido, Li, OndeLer);
```


Quicksort Externo

```
         if UltLido.Chave > Lsup
         then begin j := Es; EscreveMax (ArqLEs, UltLido, Es); end
         else if UltLido.Chave < Linf
              then begin i := Ei; EscreveMin(ArqEi,UltLido, Ei);end
              else begin
                   InserirArea (Area, UltLido, NRArea);
                   if Ei − Esq < Dir − Es
                   then begin
                        RetiraMin (Area, R, NRArea);
                        EscreveMin (ArqEi, R, Ei); Linf := R.Chave;
                        end
                   else begin
                        RetiraMax (Area, R, NRArea);
                        EscreveMax (ArqLEs, R, Es); Lsup := R.Chave;
                        end
                   end;
         end;
    end;
  while (Ei <= Es) do
    begin RetiraMin (Area, R, NRArea); EscreveMin(ArqEi, R, Ei);end
end;
```

Quicksort Externo

Programa teste:

```
program QuicksortExterno;
{-- Entra aqui o Programa--}
type
  TipoRegistro = TipoItem;
  TipoArq      = file of TipoRegistro;
var
  ArqLEs: TipoArq;  { Gerencia o Ls e o Es }
  ArqLi : TipoArq;  { Gerencia o Li }
  ArqEi : TipoArq;  { Gerencia o Ei }
  R     : TipoRegistro;
{-- Entram aqui o procedimentos apresentados--}
begin
  Assign (ArqLi,"teste.dat");
  Assign (ArqEi,"teste.dat");
  Assign (ArqLEs,"teste.dat");
  SeekWrite (ArqLi,0);
  R := 5;  write (ArqLi, R); R := 3;  write (ArqLi, R);
  R := 10; write (ArqLi, R); R := 6;  write (ArqLi, R);
  R := 1;  write (ArqLi, R); R := 7;  write (ArqLi, R);
  R := 4;  write (ArqLi, R);
  close (ArqLi);
  QuicksortExterno (ArqLi, ArqEi, ArqLEs, 1, 7);
  close (ArqLi); close (ArqEi); close (ArqLEs);
  SeekUpdate(ArqLi, 0);
  while not eof(ArqLi) do
    begin read(ArqLi, R); writeln('Registro=', R); end;
  close(ArqLi);
end.
```


Quicksort Externo

Análise:

- Seja n o número de registros a serem ordenados.
- Seja e b o tamanho do bloco de leitura ou gravação do Sistema operacional.
- Melhor caso: $O(\frac{n}{b})$
  - Por exemplo, ocorre quando o arquivo de entrada já está ordenado.
- Pior caso: $O(\frac{n^2}{\text{TamArea}})$
  - ocorre quando um dos arquivos retornados pelo procedimento Particao tem o maior tamanho possível e o outro é vazio.
  - A medida que n cresce, a probabilidade de ocorrência do pior caso tende a zero.
- Caso Médio: $O(\frac{n}{b} log(\frac{n}{\text{TamArea}}))$
  - É o que tem amaior probabilidade de ocorrer.