Algoritmos em Grafos*

Última alteração: 24 de Setembro de 2010

*Transparências elaboradas por Charles Ornelas Almeida, Israel Guerra e Nivio Ziviani

Conteúdo do Capítulo

7.1 Definições Básicas

7.2 O Tipo Abstrato de Dados Grafo

7.2.1 Implementação por meio de Matrizes de Adjacência

7.2.2 Implementação por meio de Listas de Adjacência Usando Apontadores

7.2.3 Implementação por meio de Listas de Adjacência Usando Arranjos

7.2.4 Programa Teste para as Três Implementações

7.3 Busca em Profundidade

7.4 Verificar se Grafo é Acíclico

7.4.1 Usando Busca em Profundidade

7.4.1 Usando o Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

7.5 Busca em Largura

7.6 Ordenação Topológica

7.7 Componentes Fortemente Conectados

7.8 Árvore Geradora Mínima

7.8.1 Algoritmo Genérico para Obter a Árvore Geradora Mínima

7.8.2 Algoritmo de Prim

7.8.2 Algoritmo de Kruskal

7.9 Caminhos mais Curtos

7.10 O Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

7.10.1 Implementação por meio de Matrizes de Incidência

7.10.1 Implementação por meio de Listas de Incidência Usando Arranjos

Motivação

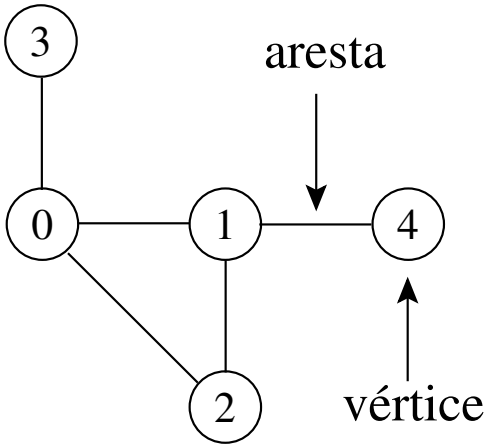
- Muitas aplicações em computação necessitam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos:
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é a menor distância entre um objeto e outro objeto?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?
- Existe um tipo abstrato chamado grafo que é usado para modelar tais situações.

Aplicações

- Alguns exemplos de problemas práticos que podem ser resolvidos através de uma modelagem em grafos:
  - Ajudar máquinas de busca a localizar informação relevante na Web.
  - Descobrir os melhores casamentos entre posições disponíveis em empresas e pessoas que aplicaram para as posições de interesse.
  - Descobrir qual é o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.

Conceitos Básicos

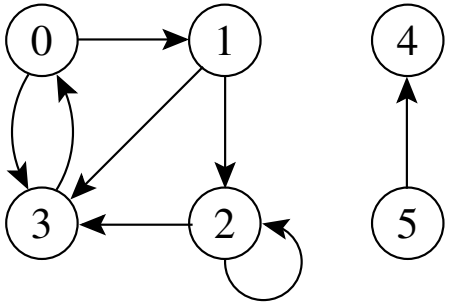
- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.



- Notação: $G = (V, A)$
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas

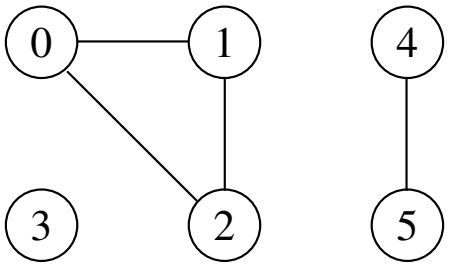
Grafos Direcionados

- Um **grafo direcionado** G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V.
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u.
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.



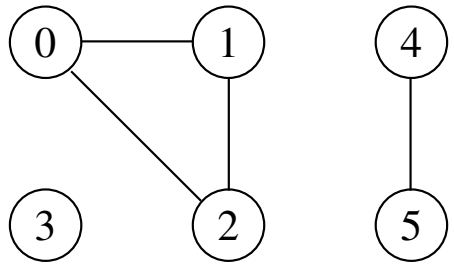
Grafos Não Direcionados

- Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.

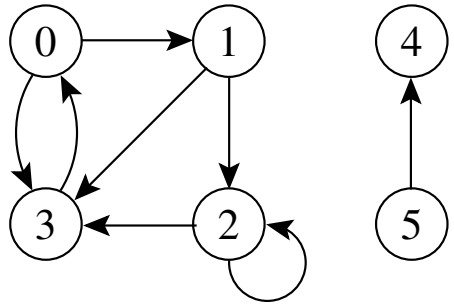


Grau de um Vértice

- Em grafos não direcionados:
  - O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
  - Um vérice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
  - Ex.: O vértice 1 tem grau 2 e o vértice 3 é isolado.



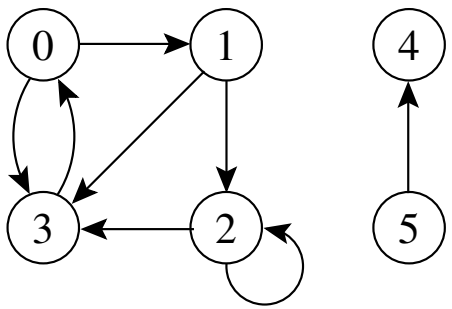
- Em grafos direcionados
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).
  - Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.



Caminho entre Vértices

- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Se existir um caminho c de x a y então y é **alcançável** a partir de x via c.
- Um caminho é **simples** se todos os vértices do caminho são distintos.

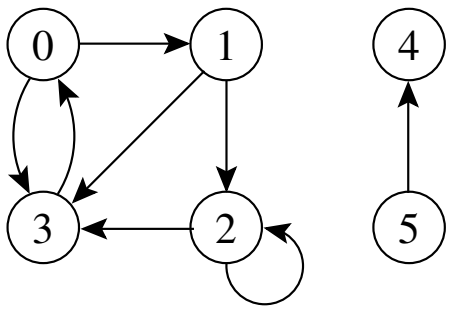
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3)$ é simples e tem comprimento 3. O caminho $(1, 3, 0, 3)$ não é simples.



Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.
  - O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1.
  - Dois caminhos $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ e $(v'_0, v'_1, \ldots, v'_k)$ formam o mesmo ciclo se existir um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

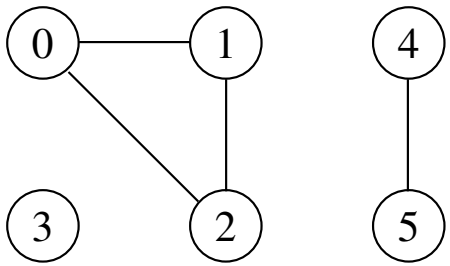
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3, 0)$ forma um ciclo. O caminho$(0, 1, 3, 0)$ forma o mesmo ciclo que os caminhos $(1, 3, 0, 1)$ e $(3, 0, 1, 3)$.



Ciclos

- Em um grafo não direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos três arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.

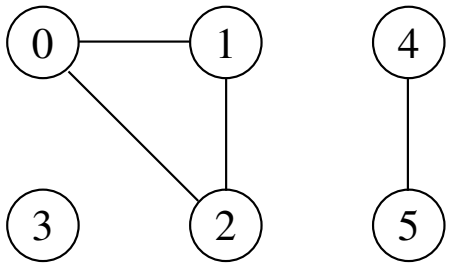
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 0)$ é um ciclo.



Componentes Conectados

- Um grafo não direcionado é conectado se cada par de vértices está conectado por um caminho.
- Os componentes conectados são as porções conectadas de um grafo.
- Um grafo não direcionado é conectado se ele tem exatamente um componente conectado.

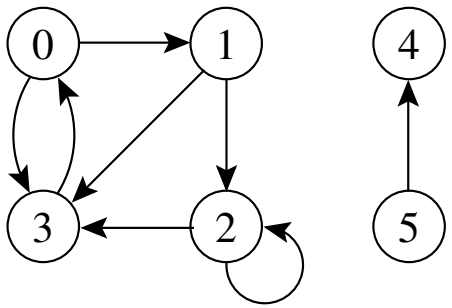
Ex.: Os componentes são: $\{0, 1, 2\}$, $\{4, 5\}$ e $\{3\}$.



Componentes Fortemente Conectados

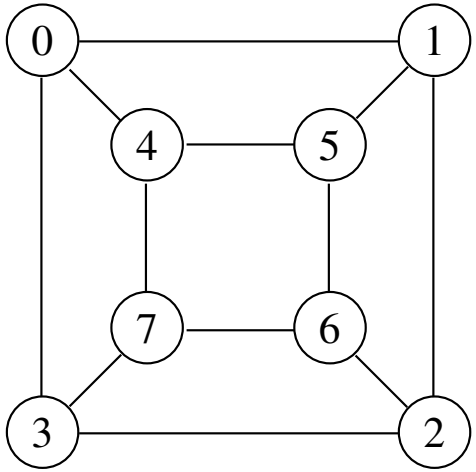
- Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação "são mutuamente alcançáveis".
- Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.

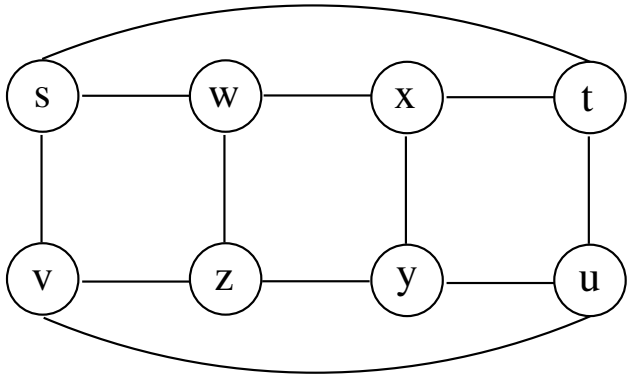
Ex.: $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$ são os componentes fortemente conectados, $\{4, 5\}$ não o é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.



Grafos Isomorfos

- $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são isomorfos se existir uma bijeção $f : V \to V'$ tal que $(u, v) \in A$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in A'$.
- Em outras palavras, é possível re-rotular os vértices de G para serem rótulos de G' mantendo as arestas correspondentes em G e G'.





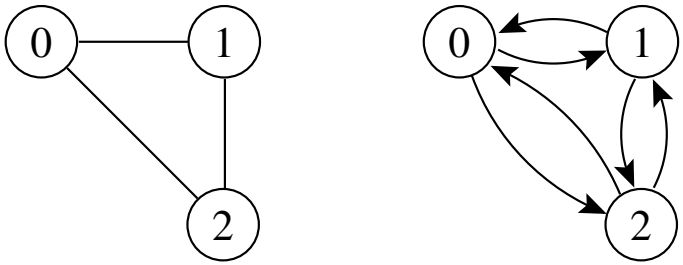
Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.
- Dado um conjunto $V' \subseteq V$, o subgrafo induzido por V' é o grafo $G' = (V', A')$, onde $A' = \{(u, v) \in A | u, v \in V'\}$.

Ex.: Subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 4, 5\}$.

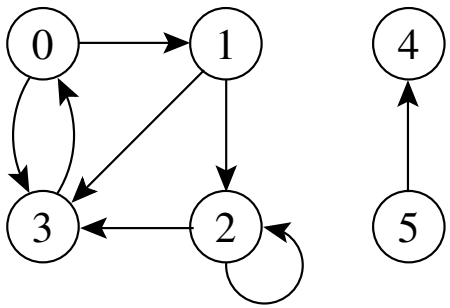
Versão Direcionada de um Grafo Não Direcionado

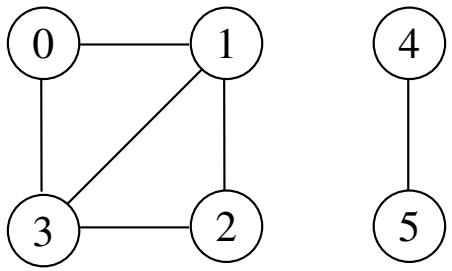
- A versão direcionada de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é um grafo direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $(u, v) \in A$.
- Cada aresta não direcionada (u, v) em G é substituída por duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u)
- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.



Versão Não Direcionada de um Grafo Direcionado

- A versão não direcionada de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um grafo não direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in A$.
- A versão não direcionada contém as arestas de G sem a direção e sem os *self-loops*.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.





Outras Classificações de Grafos

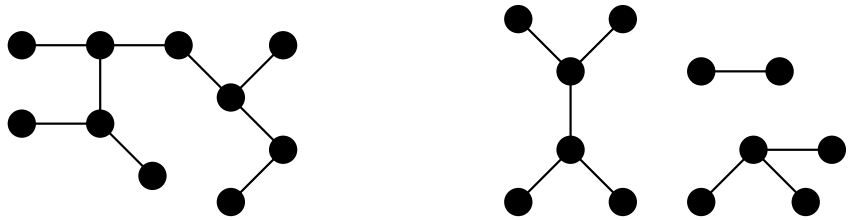
- **Grafo ponderado**: possui pesos associados às arestas.
- **Grafo bipartido**: grafo não direcionado $G = (V, A)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que $(u, v) \in A$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$ (todas as arestas ligam os dois conjuntos V_1 e V_2).
- **Hipergrafo**: grafo não direcionado em que cada aresta conecta um número arbitrário de vértices.
  - Hipergrafos são utilizados na Seção 5.5.4 sobre ***hashing* perfeito**.
  - Na Seção 7.10 é apresentada uma estrutura de dados mais adequada para representar um hipergrafo.

Grafos Completos

- Um grafo completo é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.
- Possui $(|V|^2 - |V|)/2 = |V|(|V| - 1)/2$ arestas, pois do total de $|V|^2$ pares possíveis de vértices devemos subtrair $|V|$ *self-loops* e dividir por 2 (cada aresta ligando dois vértices é contada duas vezes).
- O número total de **grafos diferentes** com $|V|$ vértices é $2^{|V|(|V|-1)/2}$ (número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de $|V|(|V| - 1)/2$ possíveis arestas).

Árvores

- **Árvore livre**: grafo não direcionado acíclico e conectado. É comum dizer apenas que o grafo é uma árvore omitindo o "livre".
- **Floresta**: grafo não direcionado acíclico, podendo ou não ser conectado.
- **Árvore geradora** de um grafo conectado $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma árvore.
- **Floresta geradora** de um grafo $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma floresta.



(a) (b)

O Tipo Abstratos de Dados Grafo

- Importante considerar os algoritmos em grafos como **tipos abstratos de dados**.
- Conjunto de operações associado a uma estrutura de dados.
- Independência de implementação para as operações.

Operadores do TAD Grafo

1. *FGVazio(Grafo)*: Cria um grafo vazio.
2. *InsereAresta(V1,V2,Peso, Grafo)*: Insere uma aresta no grafo.
3. *ExisteAresta(V1,V2,Grafo)*: Verifica se existe uma determinada aresta.
4. Obtem a lista de vértices adjacentes a um determinado vértice (tratada a seguir).
5. *RetiraAresta(V1,V2,Peso, Grafo)*: Retira uma aresta do grafo.
6. *LiberaGrafo(Grafo)*: Liberar o espaço ocupado por um grafo.
7. *ImprimeGrafo(Grafo)*: Imprime um grafo.
8. *GrafoTransposto(Grafo,GrafoT)*: Obtém o transposto de um grafo direcionado.
9. *RetiraMin(A)*: Obtém a aresta de menor peso de um grafo com peso nas arestas.

Operação "Obter Lista de Adjacentes"

1. *ListaAdjVazia(v, Grafo)*: retorna *true* se a lista de adjacentes de v está vazia.

2. *PrimeiroListaAdj(v, Grafo)*: retorna o endereço do primeiro vértice na lista de adjacentes de v.

3. *ProxAdj(v, Grafo, u, Peso, Aux, FimListaAdj)*: retorna o vértice u (apontado por *Aux*) da lista de adjacentes de v, bem como o peso da aresta (v, u). Ao retornar, *Aux* aponta para o próximo vértice da lista de adjacentes de v, e *FimListaAdj* retorna *true* se o final da lista de adjacentes foi encontrado.

Implementação da Operação "Obter Lista de Adjacentes"

- É comum encontrar um pseudo comando do tipo:

  for u $\in$ ListaAdjacentes (v) **do** { faz algo com u }

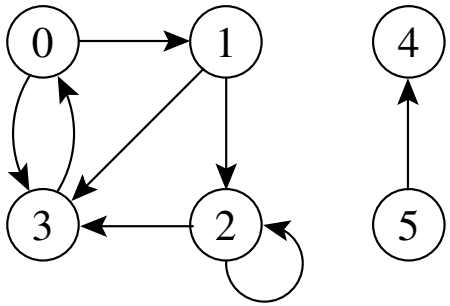
- O trecho de programa abaixo apresenta um possível refinamento do pseudo comando acima.

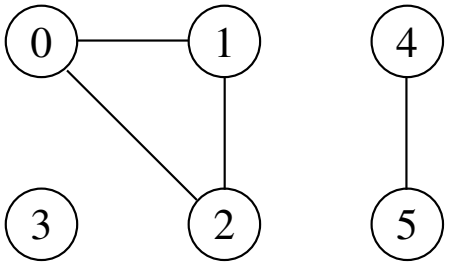
```
if not ListaAdjVazia (v, Grafo)
then begin
    Aux := PrimeiroListaAdj (v, Grafo);
    FimListaAdj := false;
    while not FimListaAdj do
      ProxAdj (v, Grafo, u, Peso, Aux, FimListaAdj);
    end;
```

Matriz de Adjacência

- A matriz de adjacência de um grafo $G = (V, A)$ contendo n vértices é uma matriz $n \times n$ de *bits*, onde $A[i, j]$ é 1 (ou verdadeiro) se e somente se existe um arco do vértice i para o vértice j.
- Para grafos ponderados $A[i, j]$ contém o rótulo ou peso associado com a aresta e, neste caso, a matriz não é de *bits*.
- Se não existir uma aresta de i para j então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como rótulo ou peso.

Matriz de Adjacência: Exemplo





	0	1	2	3	4	5
0		1		1		
1			1	1		
2			1	1		
3	1					
4						
5						

(a)

	0	1	2	3	4	5
0		1	1			
1	1		1			
2	1	1				
3						
4						
5						

(b)

Matriz de Adjacência: Análise

- Deve ser utilizada para grafos **densos**, onde $|A|$ é próximo de $|V|^2$.
- O tempo necessário para acessar um elemento é independente de $|V|$ ou $|A|$.
- É muito útil para algoritmos em que necessitamos saber com rapidez se existe uma aresta ligando dois vértices.
- A maior desvantagem é que a matriz necessita $\Omega(|V|^2)$ de espaço. Ler ou examinar a matriz tem complexidade de tempo $O(|V|^2)$.

Matriz de Adjacência: Estrutura de Dados

- A inserção de um novo vértice ou retirada de um vértice já existente pode ser realizada com custo constante.

```
const MAXNUMVERTICES = 100;
      MAXNUMARESTAS  = 4500;
type
  TipoValorVertice = 0..MAXNUMVERTICES;
  TipoPeso         = integer;
  TipoGrafo        = record
                       Mat: array[TipoValorVertice,TipoValorVertice]
                            of TipoPeso;
                       NumVertices: 0..MAXNUMVERTICES;
                       NumArestas : 0..MAXNUMARESTAS;
                     end;
  TipoApontador    = TipoValorVertice;
```

Matriz de Adjacência: Operadores

```
procedure FGVazio (var Grafo: TipoGrafo);
var i, j: integer;
begin
  for i := 0 to Grafo.NumVertices do
    for j := 0 to Grafo.NumVertices do Grafo.mat[i, j] := 0;
end;

procedure InsereAresta (V1, V2: TipoValorVertice;
                        Peso: TipoPeso; var Grafo: TipoGrafo);
begin Grafo.Mat[V1, V2] := peso; end;

function ExisteAresta (Vertice1, Vertice2: TipoValorVertice;
                       var Grafo: TipoGrafo): boolean;
begin ExisteAresta := Grafo.Mat[Vertice1, Vertice2] > 0; end;
```

Matriz de Adjacência: Operadores

```
{-- Operadores para obter a lista de adjacentes --}
function ListaAdjVazia (Vertice: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo): boolean;
var Aux: TipoApontador;  ListaVazia: boolean;
begin
  ListaVazia := true;
  Aux := 0;
  while (Aux < Grafo.NumVertices) and ListaVazia do
    if Grafo.Mat[Vertice, Aux] > 0
    then ListaVazia := false
    else Aux := Aux + 1;
  ListaAdjVazia := ListaVazia = true;
end; { ListaAdjVazia }
```

Matriz de Adjacência: Operadores

```
{-- Operadores para obter a lista de adjacentes --}
function PrimeiroListaAdj (Vertice:TipoValorVertice;
                           var Grafo:TipoGrafo):TipoApontador;
var Aux: TipoApontador;
    ListaVazia: boolean;
begin
  ListaVazia := true;  Aux := 0;
  while (Aux < Grafo.NumVertices) and ListaVazia do
    if Grafo.Mat[Vertice, Aux] > 0
    then begin PrimeiroListaAdj:=Aux; ListaVazia:=false; end
    else Aux:=Aux + 1;
    if Aux = Grafo.NumVertices
    then writeln ('Erro: Lista adjacencia vazia (PrimeiroListaAdj)');
end; { PrimeiroListaAdj }
```

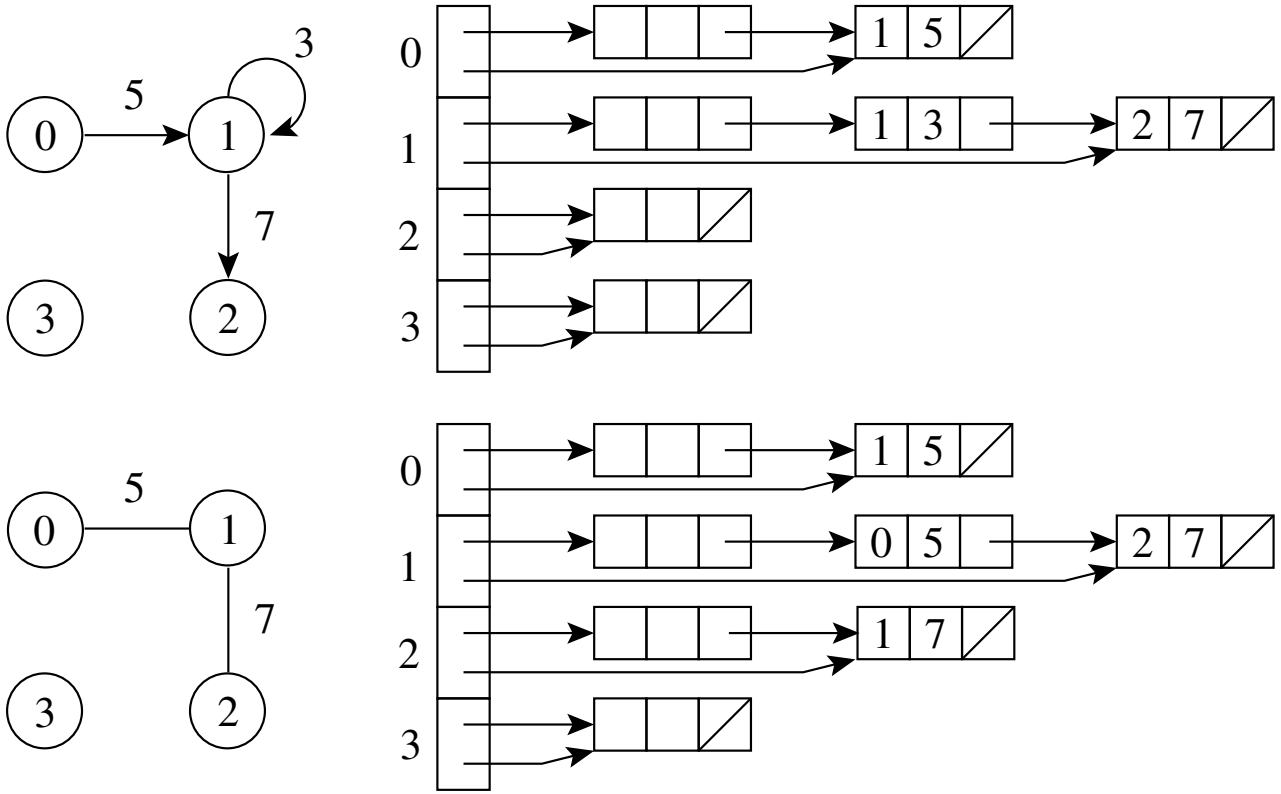
Matriz de Adjacência: Operadores

```
{-- Operadores para obter a lista de adjacentes --}
procedure ProxAdj (Vertice: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo;
                   var Adj: TipoValorVertice; var Peso: TipoPeso;
                   var Prox: TipoApontador;   var FimListaAdj: boolean);
begin {---Retorna Adj apontado por Prox---}
  Adj := Prox;
  Peso := Grafo.Mat[Vertice, Prox];
  Prox := Prox + 1;
  while (Prox < Grafo.NumVertices) and (Grafo.Mat[Vertice,Prox] = 0) do
    Prox:=Prox + 1;
  if Prox = Grafo.NumVertices then FimListaAdj := true;
end; { ProxAdj }
```

Matriz de Adjacência: Operadores

```
procedure RetiraAresta (V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso: TipoPeso; var Grafo: TipoGrafo);
begin
  if Grafo.Mat[V1, V2] = 0
  then writeln ('Aresta nao existe')
  else begin Peso := Grafo.Mat[V1, V2]; Grafo.Mat[V1, V2] := 0; end;
end; { RetiraAresta }
procedure LiberaGrafo (var Grafo: TipoGrafo);
begin  { Nao faz nada no caso de matrizes de adjacencia } end;
procedure ImprimeGrafo (var Grafo : TipoGrafo);
var i, j: integer;
begin
  write ('   '); for i := 0 to Grafo.NumVertices-1 do write (i:3); writeln;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices-1 do
    begin
    write(i:3); for j:=0 to Grafo.NumVertices-1 do write(Grafo.mat[i,j]:3); writeln;
    end;
end; { ImprimeGrafo }
```

Listas de Adjacência Usando Apontadores



- Um arranjo Adj de $|V|$ listas, uma para cada vértice em V.
- Para cada $u \in V$, $Adj[u]$ contém os vértices adjacentes a u em G.

Listas de Adjacência Usando Apontadores: Análise

- Os vértices de uma lista de adjacência são em geral armazenados em uma ordem arbitrária.
- Possui uma complexidade de espaço $O(|V| + |A|)$
- Indicada para grafos **esparsos**, onde $|A|$ é muito menor do que $|V|^2$.
- É compacta e usualmente utilizada na maioria das aplicações.
- A principal desvantagem é que ela pode ter tempo $O(|V|)$ para determinar se existe uma aresta entre o vértice i e o vértice j, pois podem existir $O(|V|)$ vértices na lista de adjacentes do vértice i.

Listas de Adjacência Usando Apontadores (1)

```
const MAXNUMVERTICES = 100;
      MAXNUMARESTAS  = 4500;
type
  TipoValorVertice = 0..MAXNUMVERTICES;
  TipoPeso         = integer;
  TipoItem         = record
                       Vertice: TipoValorVertice;
                       Peso   : TipoPeso;
                     end;
  TipoApontador    = ^TipoCelula;
  TipoCelula       = record
                       Item: TipoItem;
                       Prox: TipoApontador;
                     end;
```

Listas de Adjacência Usando Apontadores (2)

```
TipoLista   = record
                Primeiro : TipoApontador;
                Ultimo : TipoApontador;
              end;
TipoGrafo   = record
                Adj          : array[TipoValorVertice] of TipoLista;
                NumVertices : TipoValorVertice;
                NumArestas  : 0..MAXNUMARESTAS;
              end;
```

- No uso de apontadores a lista é constituída de células, onde cada célula contém um item da lista e um apontador para a célula seguinte.

Listas de Adjacência Usando Apontadores: Operadores

```
{-- Entram aqui os operadores FLVazia, Vazia, Insere, Retira e Imprime --}
{-- do TAD Lista de Apontadores do Programa 3.4                        --}
procedure FGVazio (var Grafo: TipoGrafo);
var i: integer;
begin
  for i := 0 to Grafo.NumVertices-1 do FLVazia (Grafo.Adj[i]);
end; { FGVazio }

procedure InsereAresta (V1, V2: TipoValorVertice;
                        Peso: TipoPeso;
                        var Grafo: TipoGrafo);
var x: TipoItem;
begin
  x.Vertice := V2;
  x.Peso := Peso;
  Insere (x, Grafo.Adj[V1]);
end; { InsereAresta }
```

Listas de Adjacência usando Apontadores

```
function ExisteAresta (Vertice1, Vertice2: TipoValorVertice;
                       var Grafo: TipoGrafo): boolean;
var Aux: TipoApontador;  EncontrouAresta: boolean;
begin
  Aux := Grafo.Adj[Vertice1].Primeiro^.Prox;
  EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> nil) and (EncontrouAresta = false) do
    begin
     if Vertice2 = Aux^.Item.Vertice then EncontrouAresta := true;
    Aux := Aux^.Prox;
    end;
  ExisteAresta := EncontrouAresta;
end; { ExisteAresta }
```

Listas de Adjacência Usando Apontadores: Operadores

```
{-- Operadores para obter a lista de adjacentes --}
function ListaAdjVazia (Vertice: TipoValorVertice;
                        var Grafo: TipoGrafo): boolean;
begin
  ListaAdjVazia := Grafo.Adj[Vertice].Primeiro = Grafo.Adj[Vertice].Ultimo;
end;

function PrimeiroListaAdj (Vertice: TipoValorVertice;
                           var Grafo: TipoGrafo): TipoApontador;
begin
  PrimeiroListaAdj := Grafo.Adj[Vertice].Primeiro^.Prox;
end;
```

Listas de Adjacência Usando Apontadores: Operadores

```
{-- Operadores para obter a lista de adjacentes --}
procedure ProxAdj (Vertice: TipoValorVertice;  var Grafo: TipoGrafo;
                   var Adj: TipoValorVertice;  var Peso: TipoPeso;
                   var Prox: TipoApontador;    var FimListaAdj : boolean);
{--Retorna Adj e Peso do Item apontado por Prox--}
begin
  Adj := Prox^.Item.Vertice;
  Peso := Prox^.Item.Peso;
  Prox := Prox^.Prox;
  if Prox = nil then FimListaAdj := true;
end; { ProxAdj- }
```

Listas de Adjacência Usando Apontadores: Operadores

```
procedure RetiraAresta (V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso  : TipoPeso; var Grafo : TipoGrafo);
var AuxAnterior, Aux: TipoApontador; EncontrouAresta: boolean; x: TipoItem;
begin { RetiraAresta }
  AuxAnterior := Grafo.Adj[V1].Primeiro;
  Aux := Grafo.Adj[V1].Primeiro^.Prox;
  EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> nil) and (EncontrouAresta = false) do
    begin if V2 = Aux^.Item.Vertice
          then begin Retira (AuxAnterior, Grafo.Adj[V1], x);
               Grafo.NumArestas := Grafo.NumArestas - 1;
               EncontrouAresta := true;
               end;
          AuxAnterior := Aux;  Aux := Aux^.Prox;
    end;
end; { RetiraAresta }
```

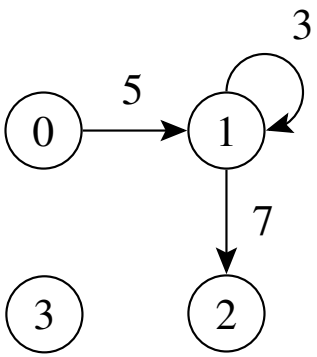
Listas de Adjacência Usando Apontadores: Operadores

```
procedure LiberaGrafo (var Grafo: TipoGrafo);
var AuxAnterior, Aux: TipoApontador;
begin
for i:= 0 to Grafo.NumVertices-1 do
  begin
  Aux := Grafo.Adj[i].Primeiro^.Prox;
  dispose (Grafo.Adj[i].Primeiro); {Libera celula cabeca}
  while Aux <> nil do
    begin
    AuxAnterior := Aux; Aux := Aux^.Prox; dispose (AuxAnterior);
    end;
  end;
end; { LiberaGrafo }
```

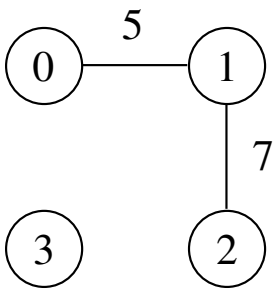
Listas de Adjacência Usando Apontadores: Operadores

```
procedure ImprimeGrafo (var Grafo : TipoGrafo);
var i: integer;  Aux: TipoApontador;
begin
  for i:= 0 to Grafo.NumVertices-1 do
    begin
    write ('Vertice', i:2,':');
    if not Vazia (Grafo.Adj[i])
    then begin
          Aux := Grafo.Adj[i].Primeiro^.Prox;
          while Aux <> nil do
            begin
            write (Aux^.Item.Vertice:3,' (',Aux^.Item.Peso,')');  Aux := Aux^.Prox;
            end;
          end;
    writeln;
    end;
end; { ImprimeGrafo }
```

Listas de Adjacência Usando Arranjos



		Cab	Prox	Peso
V	0	4	4	
	1	6	5	
	2	2	0	
	3	3	0	
A	4	1	0	5
	5	1	6	3
	6	2	0	7



		Cab	Prox	Peso
V	0	4	4	
	1	6	5	
	2	7	7	
	3	3	0	
A	4	1	0	5
	5	0	6	5
	6	2	0	7
	7	1	0	7

- *Cab*: endereços do último item da lista de adjacentes de cada vértice (nas $|V|$ primeiras posições) e os vértices propriamente ditos (nas $|A|$ últimas posições)

Listas de Adjacência Usando Arranjos

```
const MAXNUMVERTICES = 100;
      MAXNUMARESTAS  = 4500;
      MAXTAM         = MAXNUMVERTICES + 2 * MAXNUMARESTAS;
type
  TipoValorVertice = 0..MAXNUMVERTICES;
  TipoPeso         = integer;
  TipoTam          = 0..MAXTAM;
  TipoGrafo        = record
                       Cab            : array[TipoTam] of TipoTam;
                       Prox           : array[TipoTam] of TipoTam;
                       Peso           : array[TipoTam] of TipoTam;
                       ProxDisponivel : TipoTam;
                       NumVertices    : 0..MAXNUMVERTICES;
                       NumArestas     : 0..MAXNUMARESTAS;
                     end;
  TipoApontador    = TipoTam;
```

Listas de Adjacência Usando Arranjos: Operadores

```
procedure FGVazio(var Grafo: TipoGrafo);
var i: integer;
begin
for i := 0 to Grafo.NumVertices do
begin Grafo.Prox[i]:=0; Grafo.Cab[i]:=i; Grafo.ProxDisponivel:=Grafo.NumVertices; end;
end;
procedure InsereAresta(V1,V2: TipoValorVertice; Peso: TipoPeso; var Grafo: TipoGrafo);
var Pos: integer;
begin
  Pos:= Grafo.ProxDisponivel;
  if Grafo.ProxDisponivel = MAXTAM
  then writeln('nao ha espaco disponivel para a aresta')
  else begin
       Grafo.ProxDisponivel:=Grafo.ProxDisponivel+1;
       Grafo.Prox[Grafo.Cab[V1]]:=Pos;  Grafo.Cab[Pos]:= V2;
       Grafo.Cab[V1] := Pos;  Grafo.Prox[Pos] := 0;  Grafo.Peso[Pos] := Peso;
       end;
end; {InsereAresta}
```

Listas de Adjacência Usando Arranjos: Operadores

```
function ExisteAresta (Vertice1, Vertice2: TipoValorVertice;
                       var Grafo: TipoGrafo): boolean;
var Aux: TipoApontador;  EncontrouAresta: boolean;
begin
  Aux := Grafo.Prox[Vertice1];  EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> 0) and (EncontrouAresta = false) do
    begin
    if Vertice2 = Grafo.Cab[Aux] then EncontrouAresta := true;
    Aux := Grafo.Prox[Aux];
    end;
  ExisteAresta := EncontrouAresta;
end; { ExisteAresta }
```

Listas de Adjacência Usando Arranjos: Operadores

```
{-- Operadores para obter a lista de adjacentes --}
function ListaAdjVazia (Vertice: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo): boolean;
begin ListaAdjVazia := Grafo.Prox[Vertice] = 0; end;

function PrimeiroListaAdj (Vertice: TipoValorVertice;
                           var Grafo: TipoGrafo): TipoApontador;
begin PrimeiroListaAdj := Grafo.Prox[Vertice]; end;

procedure ProxAdj (Vertice: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo;
                   var Adj: TipoValorVertice; var Peso: TipoPeso;
                   var Prox: TipoApontador; var FimListaAdj: boolean);
{--Retorna Adj apontado por Prox--}
begin Adj     := Grafo.Cab[Prox];
      Peso    := Grafo.Peso[Prox];
      Prox    := Grafo.Prox[Prox];
      if Prox = 0 then FimListaAdj := true;
end; { ProxAdj- }
```

Listas de Adjacência Usando Arranjos: Operadores

```
procedure RetiraAresta (V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso: TipoPeso; var Grafo: TipoGrafo);
var Aux, AuxAnterior: TipoApontador;  EncontrouAresta : boolean;
begin
  AuxAnterior := V1; Aux := Grafo.Prox[V1]; EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> 0) and (EncontrouAresta = false) do
    begin
    if V2 = Grafo.Cab[Aux]
    then EncontrouAresta := true
    else begin AuxAnterior := Aux;  Aux := Grafo.Prox[Aux]; end;
    end;
  if EncontrouAresta {-- Apenas marca como retirado --}
  then Grafo.Cab[Aux] := MAXNUMVERTICES + 2*MAXNUMARESTAS
  else writeln('Aresta nao existe');
end; { RetiraAresta }
```

Listas de Adjacência Usando Arranjos: Operadores

```
procedure LiberaGrafo (var Grafo: TipoGrafo);
begin
  { Nao faz nada no caso de posicoes contiguas }
end; { LiberaGrafo }

procedure ImprimeGrafo (var Grafo: TipoGrafo);
var i: integer;
begin
  writeln('     Cab Prox Peso');
  for i := 0 to Grafo.NumVertices+2*Grafo.NumArestas-1 do
    writeln(i:2,Grafo.Cab[i]:4,Grafo.Prox[i]:4, Grafo.Peso[i]:4);
end; { ImprimeGrafo }
```

Busca em Profundidade

- A busca em profundidade, do inglês *depth-first search*), é um algoritmo para caminhar no grafo.
- A estratégia é buscar o mais profundo no grafo sempre que possível.
- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda possui arestas não exploradas saindo dele.
- Quando todas as arestas adjacentes a v tiverem sido exploradas a busca anda para trás para explorar vértices que saem do vértice do qual v foi descoberto.
- O algoritmo é a base para muitos outros algoritmos importantes, tais como verificação de grafos acíclicos, ordenação topológica e componentes fortemente conectados.

Busca em Profundidade

- Para acompanhar o progresso do algoritmo cada vértice é colorido de branco, cinza ou preto.
- Todos os vértices são inicializados branco.
- Quando um vértice é *descoberto* pela primeira vez ele torna-se cinza, e é tornado preto quando sua lista de adjacentes tenha sido completamente examinada.
- $d[v]$: tempo de descoberta
- $t[v]$: tempo de término do exame da lista de adjacentes de v.
- Estes registros são inteiros entre 1 e $2|V|$ pois existe um evento de descoberta e um evento de término para cada um dos $|V|$ vértices.

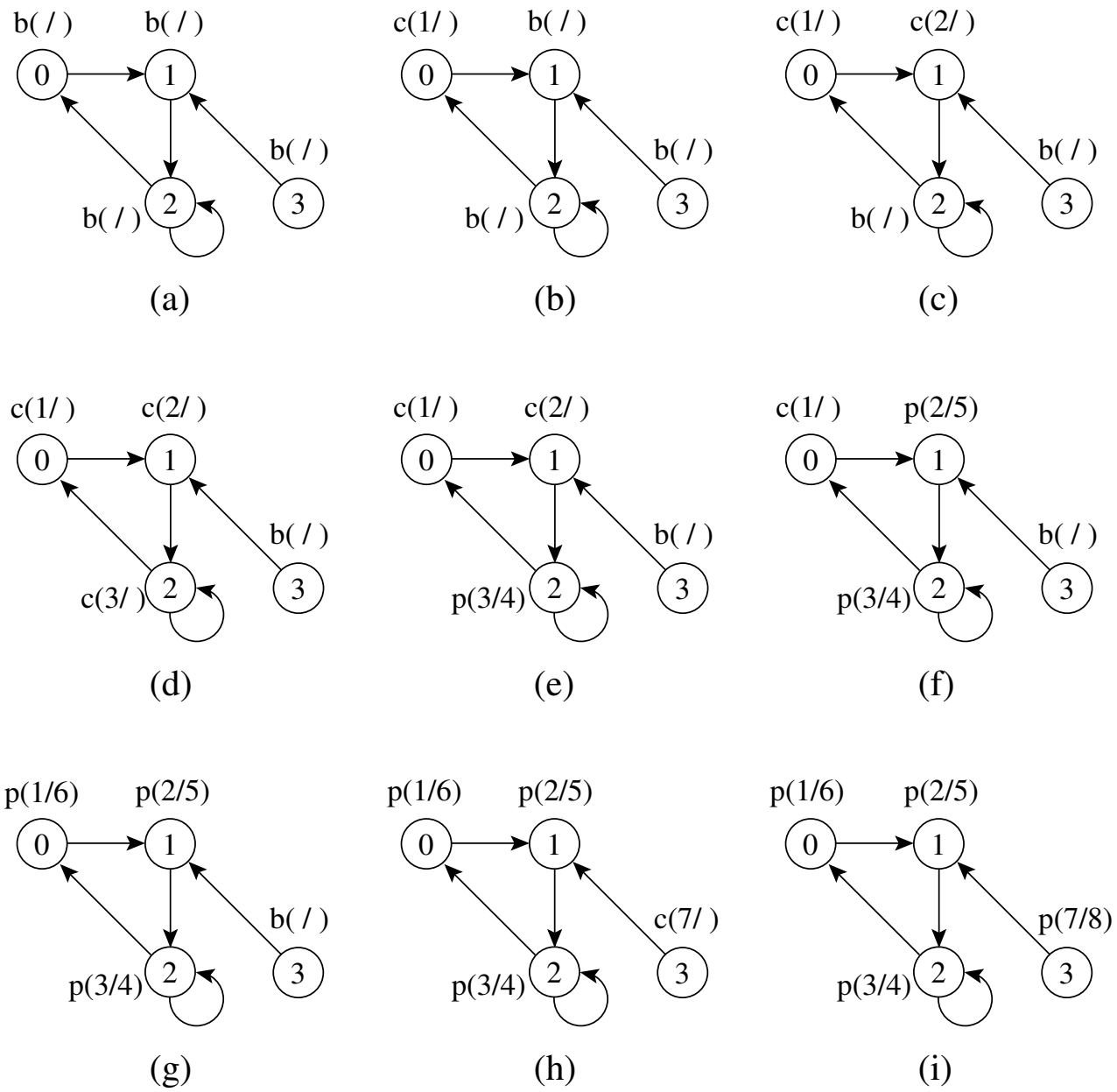
Busca em Profundidade: Implementação

```
procedure BuscaEmProfundidade (var Grafo: TipoGrafo);
var
  Tempo      : TipoValorTempo;
  x          : TipoValorVertice;
  d, t       : array[TipoValorVertice] of TipoValorTempo;
  Cor        : array[TipoValorVertice] of TipoCor;
  Antecessor : array[TipoValorVertice] of integer;

{--- Entra aqui o procedimento VisitaDFS (a seguir)---}

begin
  Tempo := 0;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices-1 do
    begin  Cor[x] := branco;  Antecessor[x] := -1;  end;
  for x := 0 to Grafo.Numvertices-1 do
    if Cor[x] = branco then VisitaDfs (x);
end; { BuscaEmProfundidade }
```

Busca em Profundidade: Implementação

```
procedure VisitaDfs (u:TipoValorVertice);
var FimListaAdj:boolean; Peso:TipoValorAresta; Aux:TipoApontador; v:TipoValorVertice;
begin
  Cor[u] := cinza;  Tempo := Tempo + 1;  d[u] := Tempo;
  writeln('Visita',u:2,' Tempo descoberta:',d[u]:2,' cinza'); readln;
  if not ListaAdjVazia (u, Grafo)
  then begin
       Aux := PrimeiroListaAdj (u, Grafo);  FimListaAdj := false;
       while not FimListaAdj do
         begin
         ProxAdj (u, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
         if Cor[v] = branco then begin Antecessor[v] := u;  VisitaDfs (v); end;
         end;
       end;
  Cor[u] := preto; Tempo := Tempo + 1;  t[u] := Tempo;
  writeln ('Visita',u:2,' Tempo termino:',t[u]:2,' preto'); readln;
end; { VisitaDfs }
```

Busca em Profundidade: Exemplo



Busca em Profundidade: Análise

- Os dois anéis da *BuscaEmProfundidade* têm custo $O(|V|)$ cada um, a menos da chamada do procedimento *VisitaDfs*(u) no segundo anel.
- O procedimento *VisitaDfs* é chamado exatamente uma vez para cada vértice $u \in V$, desde que *VisitaDfs* é chamado apenas para vértices brancos e a primeira ação é pintar o vértice de cinza.
- Durante a execução de *VisitaDfs*(u) o anel principal é executado $|Adj[u]|$ vezes.
- Desde que $\sum_{u \in V} |Adj[u]| = O(|A|)$, o tempo total de execução de *VisitaDfs* é $O(|A|)$.
- Logo, a complexidade total da *BuscaEmProfundidade* é $O(|V| + |A|)$.

Classificação de Arestas

1. **Arestas de árvore**: são arestas de uma árvore de busca em profundidade. A aresta (u, v) é uma aresta de árvore se v foi descoberto pela primeira vez ao percorrer a aresta (u, v).

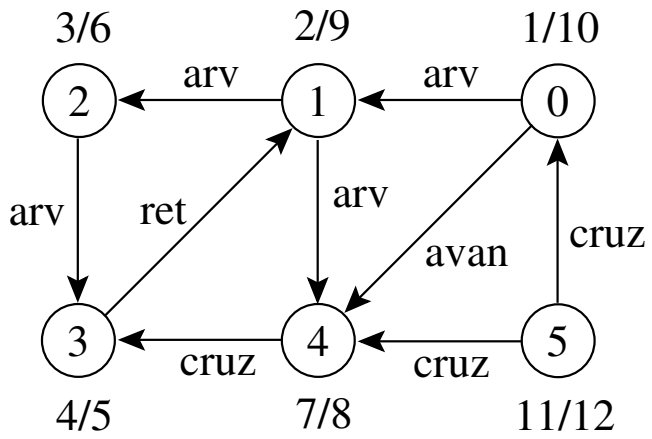
2. **Arestas de retorno**: conectam um vértice u com um antecessor v em uma árvore de busca em profundidade (inclui *self-loops*).

3. **Arestas de avanço**: não pertencem à árvore de busca em profundidade mas conectam um vértice a um descendente que pertence à árvore de busca em profundidade.

4. **Arestas de cruzamento**: podem conectar vértices na mesma árvore de busca em profundidade, ou em duas árvores diferentes.

Classificação de Arestas

- Classificação de arestas pode ser útil para derivar outros algoritmos.
- Na busca em profundidade cada aresta pode ser classificada pela cor do vértice que é alcançado pela primeira vez:
  - Branco indica uma aresta de árvore.
  - Cinza indica uma aresta de retorno.
  - Preto indica uma aresta de avanço quando u é descoberto antes de v ou uma aresta de cruzamento caso contrário.



Teste para Verificar se Grafo é Acíclico Usando Busca em Profundidade

- A busca em profundidade pode ser usada para verificar se um grafo é acíclico ou contém um ou mais ciclos.
- Se uma aresta de retorno é encontrada durante a busca em profundidade em G, então o grafo tem ciclo.
- Um grafo direcionado G é acíclico se e somente se a busca em profundidade em G não apresentar arestas de retorno.
- O algoritmo BuscaEmProfundidade pode ser alterado para descobrir arestas de retorno. Para isso, basta verificar se um vértice v adjacente a um vértice u apresenta a cor cinza na primeira vez que a aresta (u, v) é percorrida.
- O algoritmo tem custo linear no número de vértices e de arestas de um grafo $G = (V, A)$ que pode ser utilizado para verificar se G é **a**cíclico.

Teste para Verificar se Grafo é Acíclico Usando o Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

- **Hipergrafos ou** $r-$**grafos** $G_r(V, A)$ são apresentados na Seção 7.10 (Slide 119).
- Representação: por meio de estruturas de dados orientadas a arestas em que para cada vértice v do grafo é mantida uma lista das arestas que incidem sobre o vértice v.
- Existem duas representações usuais para hipergrafos: **m**atrizes de incidência e **l**istas de incidência. Aqui utilizaremos a implementação de listas de incidência usando arranjos apresentada na Seção 7.10.2.
- O programa a seguir utiliza a seguinte propriedade de r-grafos:

  Um r-grafo é **a**cíclico se e somente se a remoção repetida de arestas contendo apenas vértices de grau 1 (vértices sobre os quais incide apenas uma aresta) elimina todas as arestas do grafo.

Teste para Verificar se Grafo é Acíclico Usando o Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

- O procedimento a seguir recebe o grafo e retorna no vetor L as arestas retiradas do grafo na ordem em foram retiradas.
- O procedimento primeiro procura os vértices de grau 1 e os coloca em uma fila. A seguir, enquanto a fila não estiver vazia, desenfileira um vértice e retira a aresta incidente ao vértice.
- Se a aresta retirada tinha algum outro vértice de grau 2, então esse vértice muda para grau 1 e é enfileirado.
- Se ao final não restar nenhuma aresta, então o grafo é acíclico. O custo do procedimento GrafoAciclico é $O(|V| + |A|)$.

Teste para Verificar se Grafo é Acíclico Usando o Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

```
program GrafoAciclico;
{-- Entram aqui os tipos do Programa 3.17 (ou do Programa 3.19 --}
{-- Entram aqui tipos do Programa 7.25 (Slide 137) --}
var i, j       : integer;
    Aresta     : TipoAresta;
    Grafo      : TipoGrafo;
    L          : TipoArranjoArestas;
    GAciclico  : boolean;
{-- Entram aqui os operadores FFVazia, Vazia, Enfileira e          --}
{-- Desenfileira do Programa 3.18 (ou do Programa 3.20             --}
{-- Entram aqui os operadores ArestasIguais, FGVazio, InsereAresta, --}
{-- RetiraAresta e ImprimeGrafo do Programa 7.26 (Slide 138)       --}
function VerticeGrauUm (V: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo): Boolean;
begin
  VerticeGrauUm:=(Grafo.Prim[V]>=0) and (Grafo.Prox[Grafo.Prim[V]]=INDEFINIDO);
end;
```

Teste para Verificar se Grafo é Acíclico Usando o Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo (1)

```
procedure GrafoAciclico (var Grafo      : TipoGrafo;
                         var L          : TipoArranjoArestas;
                         var GAciclico  : boolean);
var j: TipoValorVertice;  A1: TipoValorAresta;
    x: TipoItem;  Fila: TipoFila;
    NArestas: TipoValorAresta;  Aresta: TipoAresta;
begin
  NArestas := Grafo.NumArestas;
  FFVazia (Fila);
  j := 0;
  while j < Grafo.NumVertices do
    begin
    if VerticeGrauUm (j, Grafo)
    then begin x.Chave := j;  Enfileira (x, Fila); end;
    j := j + 1;
    end;
```

Teste para Verificar se Grafo é Acíclico Usando o Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo (2)

```
  while not Vazia (Fila) and (NArestas > 0) do
  begin
  Desenfileira (Fila, x);
  if Grafo.Prim[x.Chave] >= 0
  then begin
       A1 := Grafo.Prim[x.Chave] mod Grafo.NumArestas;
       Aresta := RetiraAresta (Grafo.Arestas[A1], Grafo);
       L[Grafo.NumArestas - NArestas] := Aresta;  NArestas := NArestas - 1;
       if NArestas > 0
       then for j := 0 to Grafo.r - 1 do
            if VerticeGrauUm (Aresta.Vertices[j], Grafo)
            then begin x.Chave := Aresta.Vertices[j]; Enfileira (x, Fila); end;
       end;
  end;
  { else writeln ('Nao ha vertices de grau 1 no grafo'); }
  GAciclico := NArestas = 0;
end; { GrafoAciclico }
```

Busca em Largura

- Expande a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos uniformemente através da largura da fronteira.
- O algoritmo descobre todos os vértices a uma distância k do vértice origem antes de descobrir qualquer vértice a uma distância $k + 1$.
- O grafo $G(V, A)$ pode ser direcionado ou não direcionado.

Busca em Largura

- Cada vértice é colorido de branco, cinza ou preto.
- Todos os vértices são inicializados branco.
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se cinza.
- Vértices cinza e preto já foram descobertos, mas são distinguidos para assegurar que a busca ocorra em largura.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é preto, então o vértice v tem que ser cinza ou preto.
- Vértices cinza podem ter alguns vértices adjacentes brancos, e eles representam a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos.

Busca em Largura: Implementação

```
{-- Entram aqui os operadores FFVazia, Vazia, Enfileira e Desenfileira do--}
{-- do Programa 3.18 ou do Programa 3.20, dependendo da implementação--}
{-- da busca em largura usar arranjos ou apontadores, respectivamente--}
procedure BuscaEmLargura (var Grafo: TipoGrafo);
var x          : TipoValorVertice;
    Dist       : array[TipoValorVertice] of integer;
    Cor        : array[TipoValorVertice] of TipoCor;
    Antecessor : array[TipoValorVertice] of integer;
{--- Entra aqui o procedimento VisitaBfs (a seguir)---}
begin
  for x := 0 to Grafo.NumVertices-1 do
  begin Cor[x] := branco;  Dist[x] := INFINITO;  Antecessor[x] := -1; end;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices-1 do if Cor[x] = branco then VisitaBfs (x);
end; { BuscaEmLargura }
```

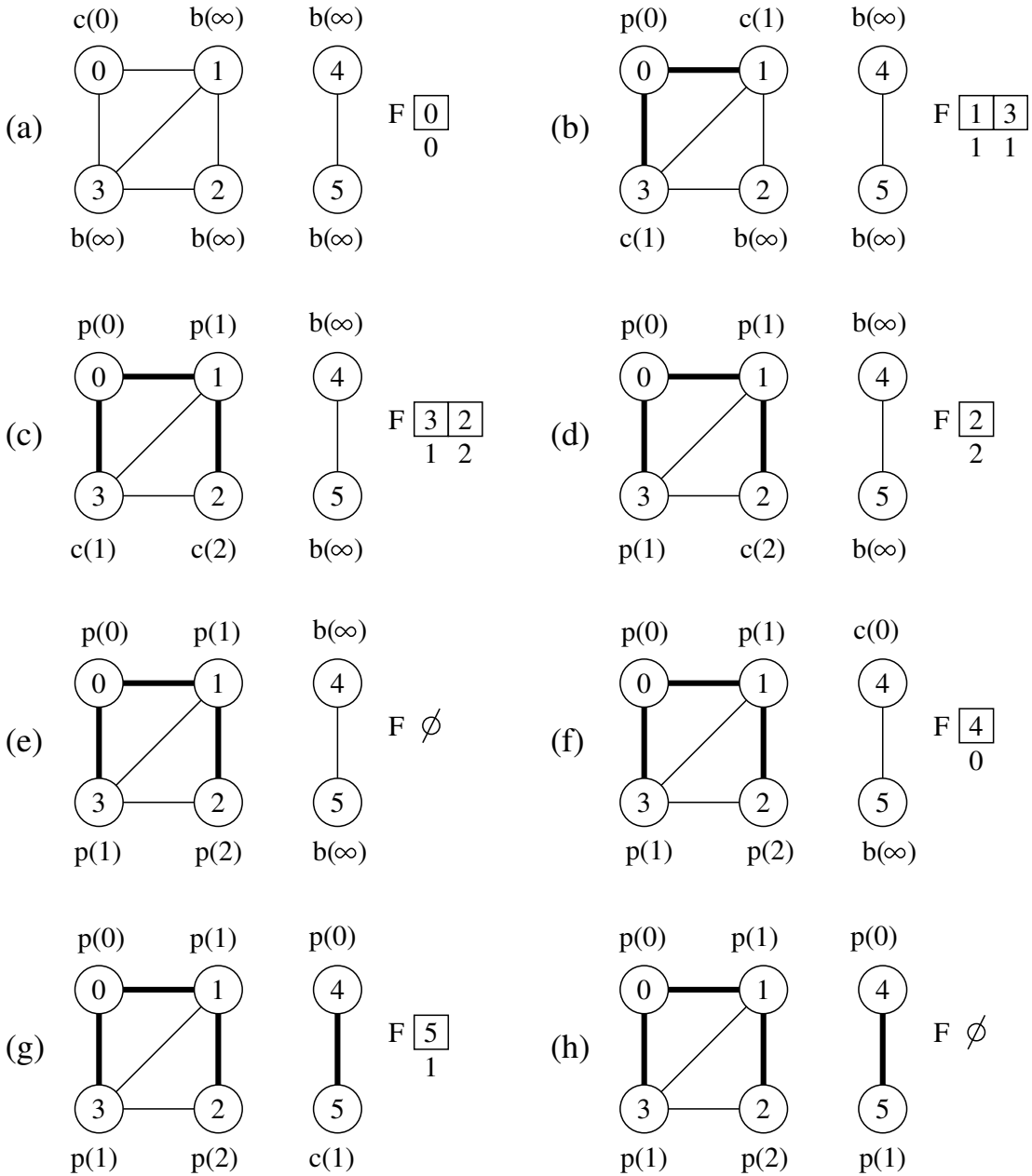
Busca em Largura: Implementação

```
procedure VisitaBfs (u:TipoValorVertice);
var
  v: TipoValorVertice;
  Aux: TipoApontador;
  FimListaAdj: boolean;
  Peso: TipoPeso;
  Item: TipoItem;
  Fila: TipoFila;
begin
  Cor[u] := cinza;
  Dist[u] := 0;
  FFVazia (Fila);
  Item.Vertice := u;
  Enfileira (Item, Fila);
  write ('Visita origem',u:2,' cor: cinza F:');
  ImprimeFila (Fila);
  readln;
```

Busca em Largura: Implementação

```
  while not FilaVazia (Fila) do
  begin Desenfileira (Fila, Item);  u := Item.vertice;
        if not ListaAdjVazia (u, Grafo)
        then begin
             Aux := PrimeiroListaAdj (u,Grafo);  FimListaAdj := false;
             while FimListaAdj = false do
               begin
               ProxAdj (u, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
               if Cor[v] = branco
               then begin
                    Cor[v] := cinza;  Dist[v] := Dist[u] + 1;  Antecessor[v] := u;
                    Item.Vertice := v;  Item.Peso := Peso;  Enfileira (Item, Fila);
                    end;
               end;
             end;
        Cor[u] := preto;  write ('Visita', u:2,' Dist',Dist[u]:2,' cor: preto F:');
        ImprimeFila (Fila); readln;
  end;
end; { VisitaBfs }
```

Busca em Largura: Exemplo



Busca em Largura: Análise (Para Listas de Adjacência)

- O custo de inicialização do primeiro anel em *BuscaEmLargura* é $O(|V|)$ cada um.
- O custo do segundo anel é também $O(|V|)$.
- *VisitaBfs*: enfileirar e desenfileirar têm custo $O(1)$, logo, o custo total com a fila é $O(|V|)$.
- Cada lista de adjacentes é percorrida no máximo uma vez, quando o vértice é desenfileirado.
- Desde que a soma de todas as listas de adjacentes é $O(|A|)$, o tempo total gasto com as listas de adjacentes é $O(|A|)$.
- Complexidade total: é $O(|V| + |A|)$.

Caminhos Mais Curtos

- A busca em largura obtém o **caminho mais curto** de u até v.
- O procedimento *VisitaBfs* contrói uma árvore de busca em largura que é armazenada na variável *Antecessor*.
- O programa a seguir imprime os vértices do caminho mais curto entre o vértice origem e outro vértice qualquer do grafo.

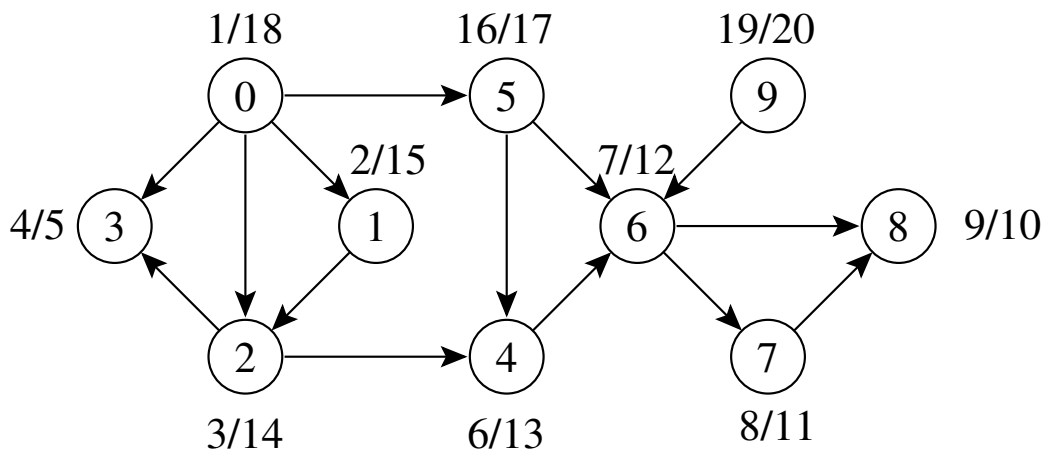
```
procedure ImprimeCaminho (Origem, v: TipovalorVertice);
begin if Origem = v
      then write (Origem:3)
      else if Antecessor[v] = −1
           then write ('Nao existe caminho de',Origem:3,' ate',v:3)
           else begin
                Imprimecaminho (Origem, Antecessor[v]);
                write (v:3);
                end;
end; { ImprimeCaminho }
```

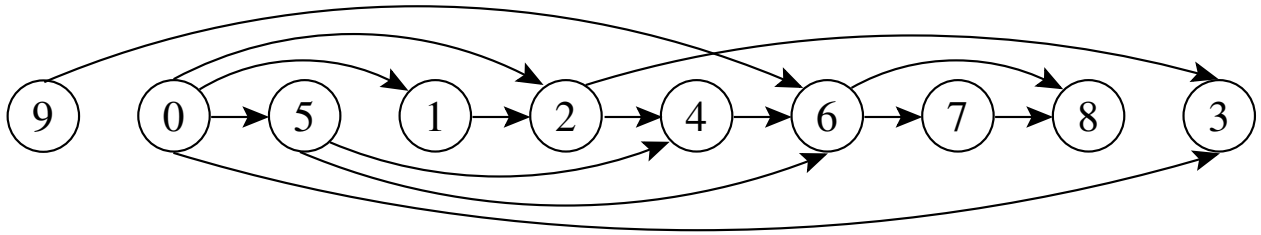
Ordenação Topológica

- Ordenação linear de todos os vértices, tal que se G contém uma aresta (u, v) então u aparece antes de v.
- Pode ser vista como uma ordenação de seus vértices ao longo de uma linha horizontal de tal forma que todas as arestas estão direcionadas da esquerda para a direita.
- Pode ser feita usando a busca em profundidade.

Ordenação Topológica

- Os grafos direcionados acíclicos são usados para indicar precedências entre eventos.
- Uma aresta direcionada (u, v) indica que a atividade u tem que ser realizada antes da atividade v.





Ordenação Topológica

- Algoritmo para ordenar topologicamente um grafo direcionado acíclico $G = (V, A)$:
  1. Chama *BuscaEmProfundidade(G)* para obter os tempos de término $t[u]$ para cada vértice u.
  2. Ao término de cada vértice insira-o na frente de uma lista linear encadeada.
  3. Retorna a lista encadeada de vértices.
- A Custo $O(|V| + |A|)$, uma vez que a busca em profundidade tem complexidade de tempo $O(|V| + |A|)$ e o custo para inserir cada um dos $|V|$ vértices na frente da lista linear encadeada custa $O(1)$.

Ordenação Topológica: Implementação

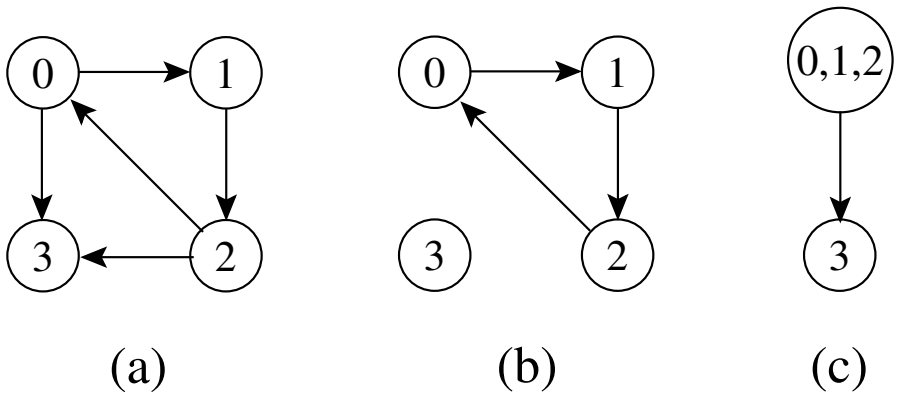
- Basta inserir uma chamada para o procedimento *InsLista* no procedimento *BuscaDfs*, logo após o momento em que o tempo de término $t[u]$ é obtido e o vértice é pintado de preto.
- Ao final, basta retornar a lista obtida (ou imprimí-la usando o procedimento Imprime do Programa 3.4).

```
procedure InsLista (var Item: TipoItem; var Lista: TipoLista);
{-- Insere antes do primeiro item da lista --}
var Aux: TipoApontador;
begin
  Aux := Lista.Primeiro^.Prox;
  new (Lista.Primeiro^.Prox);
  Lista.Primeiro^.Prox^.Item := Item;
  Lista.Primeiro^.Prox^.Prox := Aux;
end;
```

Componentes Fortemente Conectados

- Um componente fortemente conectado de $G = (V, A)$ é um conjunto maximal de vértices $C \subseteq V$ tal que para todo par de vértices u e v em C, u e v são mutuamente alcançáveis

- Podemos particionar V em conjuntos V_i, $1 \leq i \leq r$, tal que vértices u e v são equivalentes se e somente se existe um caminho de u a v e um caminho de v a u.



Componentes Fortemente Conectados: Algoritmo

- Usa o **transposto** de G, definido $G^T = (V, A^T)$, onde $A^T = \{(u, v) : (v, u) \in A\}$, isto é, A^T consiste das arestas de G com suas direções invertidas.

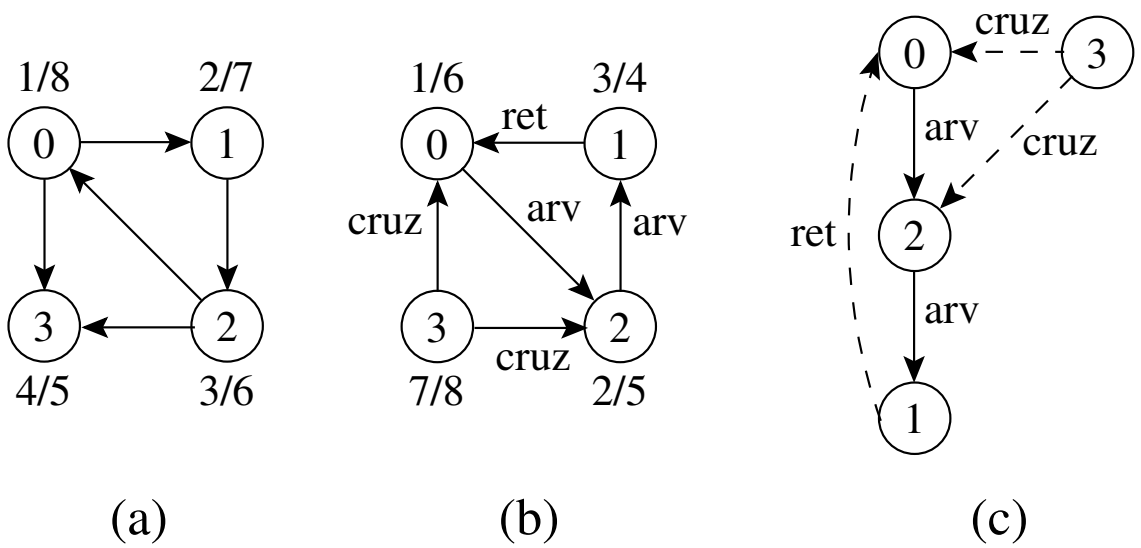
- G e G^T possuem os mesmos componentes fortemente conectados, isto é, u e v são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em G se e somente se u e v são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em G^T.

Componentes Fortemente Conectados: Algoritmo

1. Chama *BuscaEmProfundidade*(G) para obter os tempos de término $t[u]$ para cada vértice u.
2. Obtem G^T.
3. Chama *BuscaEmProfundidade*(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior $t[u]$ obtido na linha 1. Inicie uma nova busca em profundidade a partir do vértice de maior $t[u]$ dentre os vértices restantes se houver.
4. Retorne os vértices de cada árvore da floresta obtida como um componente fortemente conectado separado.

Componentes Fortemente Conectados: Exemplo

- A parte (b) apresenta o resultado da busca em profundidade sobre o grafo transposto obtido, mostrando os tempos de término e a classificação das arestas.
- A busca em profundidade em G^T resulta na floresta de árvores mostrada na parte (c).



Componentes Fortemente Conectados: Implementação

```
procedure GrafoTransposto (var Grafo, var GrafoT: TipoGrafo);
var v, Adj: TipoValorVertice;  i: integer; Peso: TipoPeso;  Aux: TipoApontador;
begin
  FGVazio(GrafoT);  GrafoT.NumVertices := Grafo.NumVertices;
  GrafoT.NumArestas := Grafo.NumArestas;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices-1 do
    begin
    v := i;
    if not ListaAdjVazia (v, Grafo)
    then begin
          Aux := PrimeiroListaAdj (v, Grafo);  FimListaAdj := false;
          while not FimListaAdj do
            begin ProxAdj(v, Grafo, Adj, Peso, Aux, FimListaAdj);
                  InsereAresta (Adj, v, Peso, GrafoT);
            end;
          end;
     end;
end; { GrafoTransposto }
```

Componentes Fortemente Conectados: Implementação

```
type TipoTempoTermino = record
                          t: array[TipoValorVertice] of TipoValorTempo;
                          Restantes: array[TipoValorVertice] of boolean;
                          NumRestantes: TipoValorVertice;
                        end;
function MaxTT (var TT: TipoTempoTermino): TipoValorVertice;
var i, Temp: integer;
begin
  i:=0; while not TT.Restantes[i] do i := i + 1;
  Temp := TT.t[i]; MaxTT := i;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices-1 do
    if TT.Restantes[i]
    then if Temp < TT.t[i] then begin Temp := TT.t[i]; MaxTT := i; end;
end; { MaxTT }
```

- BuscaEmProfundidadeCfc utiliza *MaxTT* para obter o vértice de maior $t[u]$ dentre os vértices restantes u ainda não visitados por VisitaDFS.

Componentes Fortemente Conectados: Implementação

```
procedure BuscaEmProfundidadeCfc (var Grafo: TipoGrafo; var TT: TipoTempoTermino);
var Tempo: TipoValorTempo;  x, VRaiz: TipoValorVertice;
    d, t: array[TipoValorVertice] of TipoValorTempo;
    Cor: array[TipoValorVertice] of TipoCor;
    Antecessor: array[TipoValorVertice] of integer;
{--- Entra aqui o procedimento VisitaDFS (a seguir)---}
begin
  Tempo := 0;
  for x:=0 to Grafo.NumVertices-1 do begin Cor[x]:=branco; Antecessor[x]:= -1; end;
  TT.NumRestantes := Grafo.NumVertices;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices-1 do TT.Restantes[x] := true;
  while TT.NumRestantes > 0 do
    begin
    VRaiz := MaxTT (TT); writeln('Raiz da proxima arvore:',VRaiz:2);
    VisitaDfs (VRaiz);
    end;
end; { BuscaEmProfundidadeCfc }
```

Componentes Fortemente Conectados: Implementação

```
procedure VisitaDfs (u:TipoValorVertice);
var FimListaAdj: boolean; Peso: TipoPeso; Aux: Apontador; v: TipoValorVertice;
begin
  Cor[u] := cinza;  Tempo := Tempo + 1;  d[u] := Tempo;
  TT.Restantes[u] := false;  TT.NumRestantes := TT.NumRestantes-1;
  writeln('Visita',u:2,' Tempo descoberta:',d[u]:2,' cinza'); readln;
  if not ListaAdjVazia(u, Grafo)
  then begin
       Aux := PrimeiroListaAdj(u, Grafo);  FimListaAdj := false;
       while not FimListaAdj do
         begin
         ProxAdj(u, Grafo, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
         if Cor[v] = branco then begin Antecessor[v] := u; VisitaDfs(v); end;
         end;
       end;
  Cor[u] := preto;  Tempo := Tempo + 1;  t[u] := Tempo;
  writeln('Visita',u:2,' Tempo termino:',t[u]:2,' preto'); readln;
end; { VisitaDfs }
```

Componentes Fortemente Conectados: Análise

- Utiliza o algoritmo para busca em profundidade duas vezes, uma em G e outra em G^T.
- Logo, a complexidade total é $O(|V| + |A|)$.

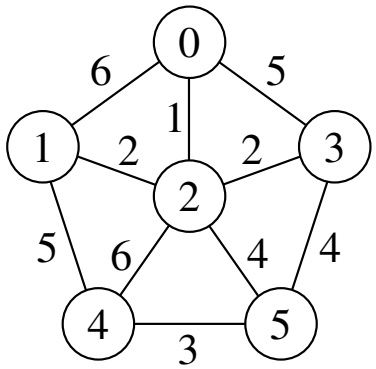
Árvore Geradora Mínima

- Projeto de redes de comunicações conectando n localidades.
- Arranjo de $n - 1$ conexões, conectando duas localidades cada.
- Objetivo: dentre as possibilidades de conexões, achar a que usa menor quantidade de cabos.
- Modelagem:
  - $G = (V, A)$: grafo conectado, não direcionado.
  - V: conjunto de cidades.
  - A: conjunto de possíveis conexões
  - $p(u, v)$: peso da aresta $(u, v) \in A$, custo total de cabo para conectar u a v.
- Solução: encontrar um subconjunto $T \subseteq A$, acíclico, que conecta todos os vértices de G e cujo peso total $p(T) = \sum_{(u,v)\in T} p(u, v)$ é minimizado.

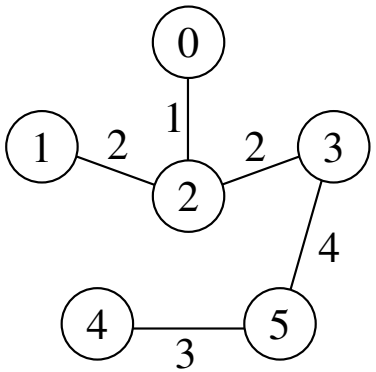
Árvore Geradora Mínima

- Como $G' = (V, T)$ é acíclico e conecta todos os vértices, T forma uma árvore chamada **árvore geradora** de G.
- O problema de obter a árvore T é conhecido como **árvore geradora mínima** (AGM).

Ex.: Árvore geradora mínima T cujo peso total é 12. T não é única, pode-se substituir a aresta $(3, 5)$ pela aresta $(2, 5)$ obtendo outra árvore geradora de custo 12.



(a)



(b)

AGM - Algoritmo Genérico

procedure GenericoAGM;

1 $S := \emptyset$;

2 **while** S não constitui uma árvore geradora mínima **do**

3 Encontre uma aresta (u, v) que é segura para S;

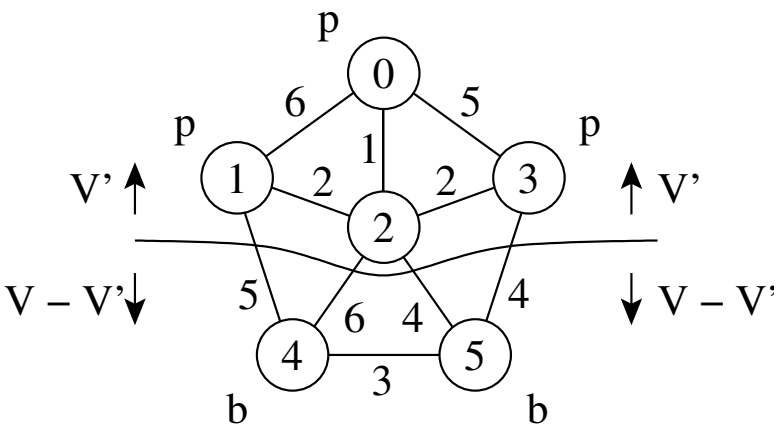
4 $S := S + \{(u, v)\}$

5 return S;

- Uma estratégia **gulosa** permite obter a AGM adicionando uma aresta de cada vez.
- Invariante: Antes de cada iteração, S é um subconjunto de uma árvore geradora mínima.
- A cada passo adicionamos a S uma aresta (u, v) que não viola o invariante. (u, v) é chamada de uma **aresta segura**.
- Dentro do **while**, S tem que ser um subconjunto próprio da AGM T, e assim tem que existir uma aresta $(u, v) \in T$ tal que $(u, v) \notin S$ e (u, v) é seguro para S.

AGM - Definição de Corte

- Um **corte** $(V', V - V')$ de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é uma partição de V.
- Uma aresta $(u, v) \in A$ *cruza* o corte $(V', V - V')$ se um de seus vértices pertence a V' e o outro vértice pertence a $V - V'$.
- Um corte *respeita* um conjunto S de arestas se não existirem arestas em S que o cruzem.
- Uma aresta cruzando o corte que tenha custo mínimo sobre todas as arestas cruzando o corte é uma *aresta leve*.



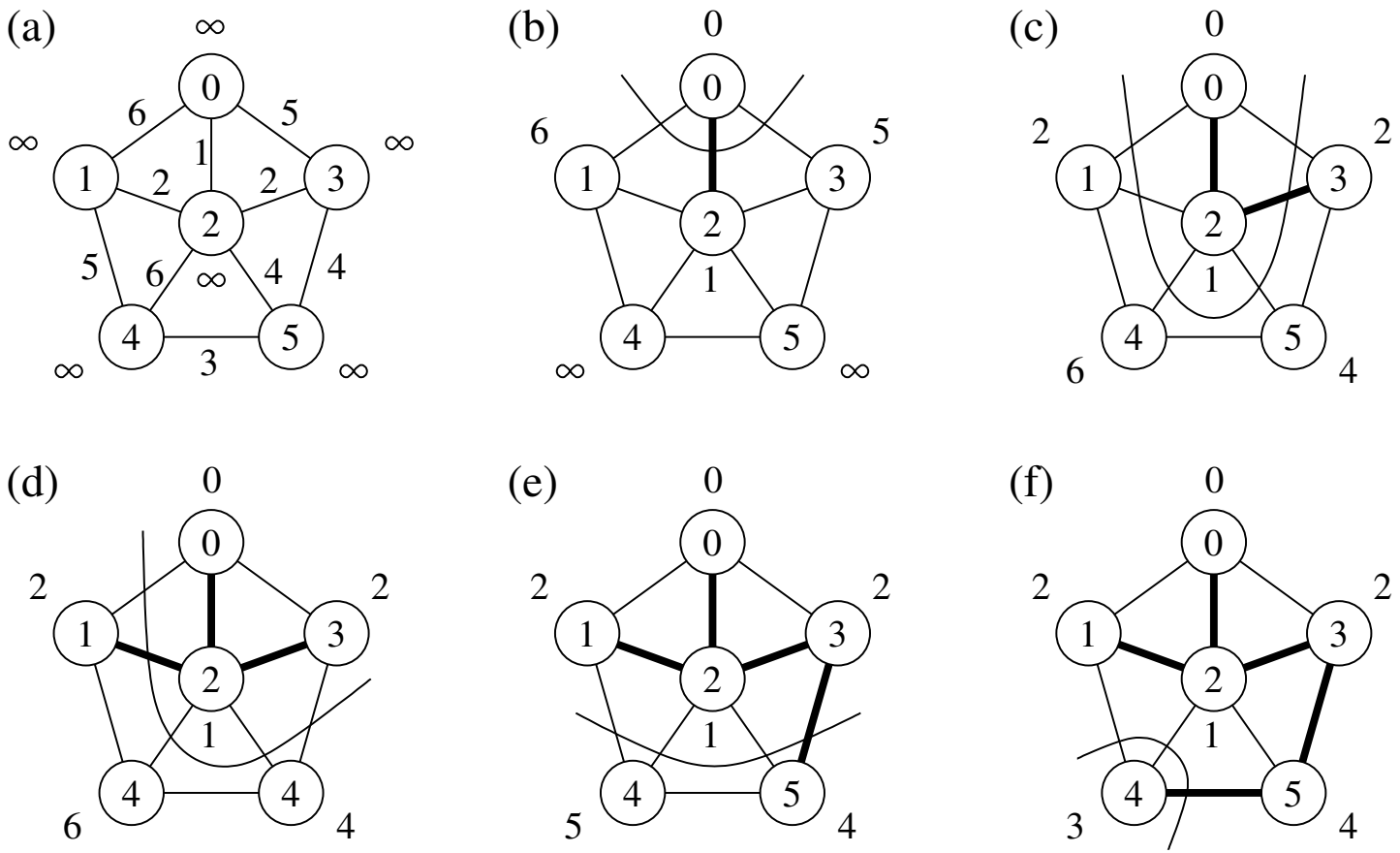
AGM - Teorema para Reconhecer Arestas Seguras

- Considere $G = (V, A)$ um grafo conectado, não direcionado, com pesos p sobre as arestas V.
- Considere S um subconjunto de V que está incluído em alguma AGM para G.
- Considere $(V', V - V')$ um corte qualquer que respeita S.
- Considere (u, v) uma aresta leve cruzando $(V', V - V')$.
- Satisfeitas essas condições, (u, v) é uma aresta segura para S.

Algoritmo de Prim para Obter Uma AGM

- O algoritmo de Prim para obter uma AGM pode ser derivado do algoritmo genérico.
- O subconjunto S forma uma única árvore, e a aresta segura adicionada a S é sempre uma aresta de peso mínimo conectando a árvore a um vértice que não esteja na árvore.
- A árvore começa por um vértice qualquer (no caso 0) e cresce até que "gere" todos os vértices em V.
- A cada passo, uma aresta leve é adicionada à árvore S, conectando S a um vértice de $G_S = (V, S)$.
- De acordo com o teorema anterior, quando o algoritmo termina, as arestas em S formam uma árvore geradora mínima.

Algoritmo de Prim: Exemplo



Prim: Operadores para Manter o *Heap* Indireto (1)

```
{-- Entra aqui o operador Constroi da Seção 4.1.5 (Programa 4.10) --}
{-- Trocando a chamada Refaz (Esq, n , A) por RefazInd (Esq, n, A)--}
procedure RefazInd (Esq, Dir: TipoIndice; var A: TipoVetor);
label 999;
var i: TipoIndice;  j: integer;  x: TipoItem;
begin
  i := Esq;  j := 2 * i;  x := A[i];
  while j <= Dir do
    begin
    if j < Dir then if p[A[j].Chave] > p[A[j + 1].Chave] then j := j + 1;
    if p[x.Chave] <= p[A[j].Chave] then goto 999;
    A[i] := A[j];  Pos[A[j].Chave] := i;  i := j;  j := 2 * i;
    end;
  999: A[i] := x;  Pos[x.Chave] := i;
end; { RefazInd }
```

Prim: Operadores para Manter o *Heap* Indireto (2)

```
function RetiraMinInd (var A: TipoVetor): TipoItem;
begin
  if n < 1
  then writeln ('Erro: heap vazio')
  else begin
       RetiraMinInd := A[1];  A[1] := A[n];
       Pos[A[n].chave] := 1;  n := n - 1;  RefazInd (1, n, A);
       end;
end; { RetiraMinInd }
```

Prim: Operadores para Manter o *Heap* Indireto (3)

```
procedure DiminuiChaveInd (i: TipoIndice; ChaveNova: TipoPeso; var A: TipoVetor);
var x: TipoItem;
begin
  if ChaveNova > p[A[i].Chave]
  then writeln ('Erro: ChaveNova maior que a chave atual')
  else begin
       p[A[i].Chave] := ChaveNova;
       while (i>1) and (p[A[i div 2].Chave] > p[A[i].Chave]) do
         begin
         x := A[i div 2];  A[i div 2] := A[i];
         Pos[A[i].Chave] := i div 2;  A[i] := x;
         Pos[x.Chave] := i;  i := i div 2;
         end;
       end;
end; { DiminuiChaveInd }
```

Algoritmo de Prim: Implementação

```
procedure AgmPrim (var Grafo: TipoGrafo; var Raiz: TipoValorVertice);
var Antecessor: array[TipoValorVertice] of integer;
    P         : array[TipoValorVertice] of TipoPeso;
    Itensheap : array[TipoValorVertice] of boolean;
    Pos       : array[TipoValorVertice] of TipoValorVertice;
    A         : TipoVetor;
    u, v      : TipovalorVertice;
{-- Entram aqui operadores do tipo grafo do Slide 28 ou Slide 37 ou Slide 46, --}
{-- e os operadores RefazInd, RetiraMinInd e DiminuiChaveInd do Slide 93--}
begin { AgmPrim }
  for u := 0 to Grafo.NumVertices do
    begin {Constroi o heap com todos os valores igual a INFINITO}
    Antecessor[u] := -1; p[u] := INFINITO;
    A[u+1].Chave := u; {Heap a ser construido}
    ItensHeap[u] := true; Pos[u] := u+1;
    end;
  n := Grafo.NumVertices; p[Raiz] := 0; Constroi (A);
```

Algoritmo de Prim: Implementação

```
while n >= 1 do {enquanto heap nao estiver vazio}
  begin
  u := RetiraMinInd(A).Chave;  ItensHeap[u] := false;
  if (u <> Raiz) then write ('Aresta de arvore: v[',u,'] v[',Antecessor[u],']');
  readln;
  if not ListaAdjVazia (u,Grafo)
  then begin
       Aux := PrimeiroListaAdj (u,Grafo);   FimListaAdj := false;
       while not FimListaAdj do
         begin
         ProxAdj (u, Grafo, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
         if ItensHeap[v] and (Peso < p[v])
         then begin Antecessor[v] := u; DiminuiChaveInd (Pos[v],Peso,A); end
         end;
       end;
  end;
end; { AgmPrim }
```

Algoritmo de Prim: Implementação

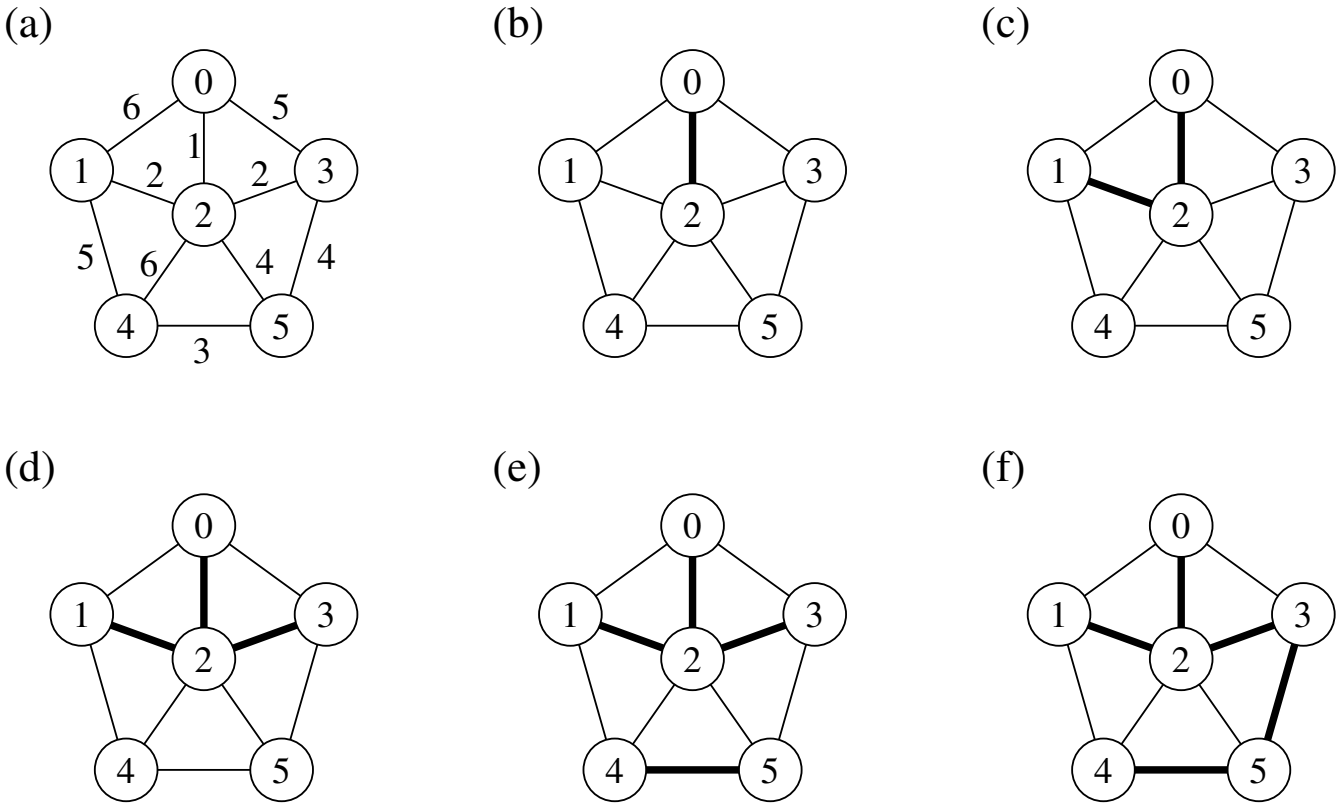
- Para realizar de forma eficiente a seleção de uma nova aresta, todos os vértices que não estão na AGM residem no *heap* A.
- O *heap* contém os vértices, mas a condição do *heap* é mantida pelo peso da aresta através do arranjo $p[v]$ (*heap* indireto).
- $Pos[v]$ fornece a posição do vértice v dentro do *heap* A, para que o vértice v possa ser acessado a um custo $O(1)$, necessário para a operação DiminuiChave.
- *Antecessor*$[v]$ armazena o antecessor de v na árvore.
- Quando o algoritmo termina, A está vazia e a AGM está de forma implícita como $S = \{(v, Antecessor[v]) : v \in V - \{Raiz\}\}$

Algoritmo de Prim: Análise

- O corpo do anel **while** é executado $|V|$ vezes.
- O procedimento *Refaz* tem custo $O(\log |V|)$.
- Logo, o tempo total para executar a operação retira o item com menor peso é $O(|V| \log |V|)$.
- O **while** mais interno para percorrer a lista de adjacentes é $O(|A|)$ (soma dos comprimentos de todas as listas de adjacência é $2|A|$).
- O teste para verificar se o vértice v pertence ao *heap* A custa $O(1)$.
- Após testar se v pertence ao *heap* A e o peso da aresta (u, v) é menor do que $p[v]$, o antecessor de v é armazenado em *Antecessor* e uma operação *DiminuiChave* é realizada sobre o *heap* A na posição $Pos[v]$, a qual tem custo $O(\log |V|)$.
- Logo, o tempo total para executar o algoritmo de Prim é $O(|V \log |V| + |A| \log |V|) = O(|A| \log |V|)$.

AGM - Algoritmo de Kruskal

- Pode ser derivado do algoritmo genérico.
- S é uma floresta e a aresta segura adicionada a S é sempre uma aresta de menor peso que conecta dois componentes distintos.
- Considera as arestas ordenadas pelo peso.



AGM - Algoritmo de Kruskal

- Sejam C_1 e C_2 duas árvores conectadas por (u, v):
  - Como (u, v) tem de ser uma aresta leve conectando C_1 com alguma outra árvore, (u, v) é uma aresta segura para C_1.
- É guloso porque, a cada passo, ele adiciona à floresta uma aresta de menor peso.
- Obtém uma AGM adicionando uma aresta de cada vez à floresta e, a cada passo, usa a aresta de menor peso que não forma ciclo.
- Inicia com uma floresta de $|V|$ árvores de um vértice: em $|V|$ passos, une duas árvores até que exista apenas uma árvore na floresta.

Algoritmo de Kruskal: Implementação

- Usa fila de prioridades para obter arestas em ordem crescente de pesos.
- Testa se uma aresta adicionada ao conjunto solução S forma um ciclo.
- Tratar **conjuntos disjuntos**: maneira eficiente de verificar se uma dada aresta forma um ciclo. Utiliza estruturas dinâmicas.
- Os elementos de um conjunto são representados por um objeto. Operações:
  - CriaConjunto(x): cria novo conjunto cujo único membro, x, é seu representante. Para que os conjuntos sejam disjuntos, x não pode pertencer a outro conjunto.
  - União(x, y): une conjuntos dinâmicos contendo x (C_x) e y (C_y) em novo conjunto, cujo representante pode ser x ou y. Como os conjuntos na coleção devem ser disjuntos, C_x e C_y são destruídos.
  - EncontreConjunto(x): retorna apontador para o representante do conjunto (único) contendo x.

Algoritmo de Kruskal: Implementação

- Primeiro refinamento:

```
procedure Kruskal;
  S := ∅;
  for v := 0 to Grafo.NumVertices−1 do CriaConjunto (v);
  Ordena as arestas de A pelo peso;
  for cada (u, v) de A tomadas em ordem ascendente de peso do
    if EncontreConjunto (u) <> EncontreConjunto (v)
    then begin
          S := S + {(u, v)};
          Uniao (u, v);
          end;
```

- A implementação das operações União e EncontraConjunto deve ser realizada de forma eficiente.
- Esse problema é conhecido na literatura como **União-EncontraConjunto**.

AGM - Análise do Algoritmo de Kruskal

- A inicialização do conjunto S tem custo $O(1)$.
- Ordenar arestas (linha 3) custa $O(|A| \log |A|)$.
- A linha 2 realiza $|V|$ operações CriaConjunto.
- O anel (linhas 4-7) realiza $O(|A|)$ operações EncontreConjunto e Uniao, a um custo $O((|V| + |A|)\alpha(|V|))$ onde $\alpha(|V|)$ é uma função que cresce lentamente ($\alpha(|V|) < 4$).
- O limite inferior para construir uma estrutura dinâmica envolvendo m operações EncontreConjunto e Uniao e n operações CriaConjunto é $m\alpha(n)$.
- Como G é conectado temos que $|A| \geq |V| - 1$, e assim as operações sobre conjuntos disjuntos custam $O(|A|\alpha(|V|)$.
- Como $\alpha(|V|) = O(\log |A|) = O(\log |V|)$, o tempo total do algoritmo de Kruskal é $O(|A| \log |A|)$.
- Como $|A| < |V|^2$, então $\log |A| = O(\log |V|)$, e o custo do algoritmo de Kruskal é também $O(|A| \log |V|)$.

Caminhos Mais Curtos: Aplicação

- Um motorista procura o caminho mais curto entre Diamantina e Ouro Preto. Possui mapa com as distâncias entre cada par de interseções adjacentes.
- Modelagem:
  - $G = (V, A)$: grafo direcionado ponderado, mapa rodoviário.
  - V: interseções.
  - A: segmentos de estrada entre interseções
  - $p(u, v)$: peso de cada aresta, distância entre interseções.
- Peso de um caminho: $p(c) = \sum_{i=1}^{k} p(v_{i-1}, v_i)$
- Caminho mais curto:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} min\left\{p(c) : u \overset{c}{\rightsquigarrow} v\right\} & \text{se existir caminho de } u \text{ a } v \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Caminho mais curto** do vértice u ao vértice v: qualquer caminho c com peso $p(c) = \delta(u, v)$.

Caminhos Mais Curtos

- **Caminhos mais curtos a partir de uma origem**: dado um grafo ponderado $G = (V, A)$, desejamos obter o caminho mais curto a partir de um dado vértice origem $s \in V$ até cada $v \in V$.
- Muitos problemas podem ser resolvidos pelo algoritmo para o problema origem única:
  - **Caminhos mais curtos com destino único**: reduzido ao problema origem única invertendo a direção de cada aresta do grafo.
  - **Caminhos mais curtos entre um par de vértices**: o algoritmo para origem única é a melhor opção conhecida.
  - **Caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices**: resolvido aplicando o algoritmo origem única $|V|$ vezes, uma vez para cada vértice origem.

Caminhos Mais Curtos

- A representação de caminhos mais curtos pode ser realizada pela variável *Antecessor*.
- Para cada vértice $v \in V$ o $Antecessor[v]$ é um outro vértice $u \in V$ ou *nil* (-1).
- O algoritmo atribui a *Antecessor* os rótulos de vértices de uma cadeia de antecessores com origem em v e que anda para trás ao longo de um caminho mais curto até o vértice origem s.
- Dado um vértice v no qual $Antecessor[v] \neq nil$, o procedimento *ImprimeCaminho* pode imprimir o caminho mais curto de s até v.
- Os valores em $Antecessor[v]$, em um passo intermediário, não indicam necessariamente caminhos mais curtos.
- Entretanto, ao final do processamento, *Antecessor* contém uma árvore de caminhos mais curtos definidos em termos dos pesos de cada aresta de G, ao invés do número de arestas.
- Caminhos mais curtos não são necessariamente únicos.

Árvore de caminhos mais curtos

- Uma árvore de caminhos mais curtos com raiz em $u \in V$ é um subgrafo direcionado $G' = (V', A')$, onde $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$, tal que:
  1. V' é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de $s \in G$,
  2. G' forma uma árvore de raiz s,
  3. para todos os vértices $v \in V'$, o caminho simples de s até v é um caminho mais curto de s até v em G.

Algoritmo de Dijkstra

- Mantém um conjunto S de vértices cujos caminhos mais curtos até um vértice origem já são conhecidos.
- Produz uma árvore de caminhos mais curtos de um vértice origem s para todos os vértices que são alcançáveis a partir de s.
- Utiliza a técnica de **relaxamento**:
  - Para cada vértice $v \in V$ o atributo $p[v]$ é um limite superior do peso de um caminho mais curto do vértice origem s até v.
  - O vetor $p[v]$ contém uma estimativa de um caminho mais curto.
- O primeiro passo do algoritmo é inicializar os antecessores e as estimativas de caminhos mais curtos:
  - $Antecessor[v] = nil$ para todo vértice $v \in V$,
  - $p[u] = 0$, para o vértice origem s, e
  - $p[v] = \infty$ para $v \in V - \{s\}$.

Relaxamento

- O **relaxamento** de uma aresta (u, v) consiste em verificar se é possível melhorar o melhor caminho até v obtido até o momento se passarmos por u.
- Se isto acontecer, $p[v]$ e $Antecessor[v]$ devem ser atualizados.

```
if p[v] > p[u] + peso da aresta (u,v)
then p[v] = p[u] + peso da aresta (u,v)
     Antecessor[v] := u
```

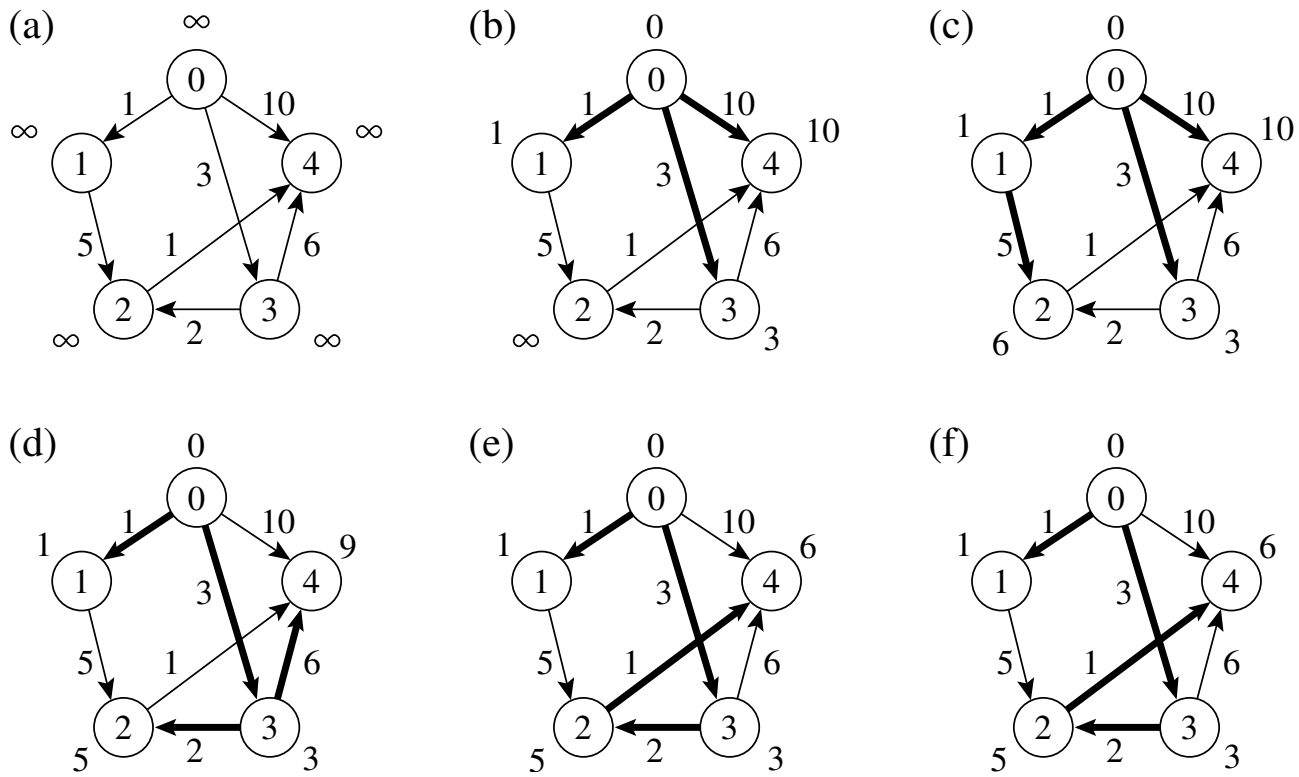
Algoritmo de Dijkstra: 1º Refinamento

```
procedure Dijkstra (Grafo, Raiz);
 for v := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
   p[v] := INFINITO;
   Antecessor[v] := −1;
 p[Raiz] := 0;
 Constroi heap no vetor A;
 S := ∅;
 While heap > 1 do
   u := RetiraMin(A);
   S := S + u
   for v ∈ ListaAdjacentes[u] do
     if p[v] > p[u] + peso da aresta (u,v)
     then p[v] = p[u] + peso da aresta (u,v)
          Antecessor[v] := u
```

Algoritmo de Dijkstra: 1º Refinamento

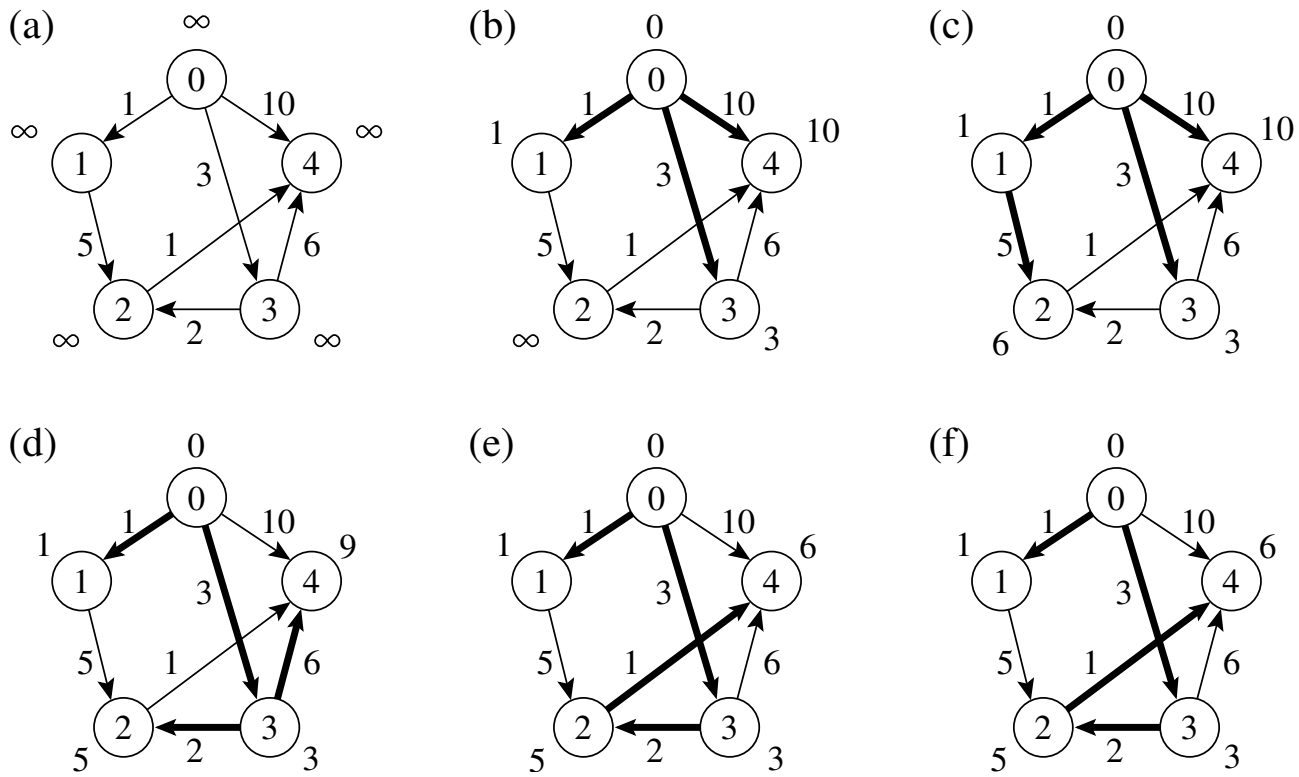
- Invariante: o número de elementos do *heap* é igual a $V - S$ no início do anel **while**.
- A cada iteração do **while**, um vértice u é extraído do *heap* e adicionado ao conjunto S, mantendo assim o invariante.
- *RetiraMin* obtém o vértice u com o caminho mais curto estimado até o momento e adiciona ao conjunto S.
- No anel da linha 10, a operação de relaxamento é realizada sobre cada aresta (u, v) adjacente ao vértice u.

Algoritmo de Dijkstra: Exemplo



Iteração	S	d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]
(a)	$\emptyset$	∞	∞	∞	∞	∞
(b)	$\{0\}$	0	1	∞	3	10
(c)	$\{0,1\}$	0	1	6	3	10

Algoritmo de Dijkstra: Exemplo



Iteração	S	d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]
(d)	$\{0, 1, 3\}$	0	1	5	3	9
(e)	$\{0, 1, 3, 2\}$	0	1	5	3	6
(f)	$\{0, 1, 3, 2, 4\}$	0	1	5	3	6

Algoritmo de Dijkstra

- Para realizar de forma eficiente a seleção de uma nova aresta, todos os vértices que não estão na árvore de caminhos mais curtos residem no *heap* A baseada no campo *p*.
- Para cada vértice v, $p[v]$ é o caminho mais curto obtido até o momento, de v até o vértice raiz.
- O *heap* mantém os vértices, mas a condição do *heap* é mantida pelo caminho mais curto estimado até o momento através do arranjo $p[v]$, o *heap* é indireto.
- O arranjo $Pos[v]$ fornece a posição do vértice v dentro do *heap* A, permitindo assim que o vértice v possa ser acessado a um custo $O(1)$ para a operação *DiminuiChaveInd*.

Algoritmo de Dijkstra: Implementação

```
procedure Dijkstra (var Grafo: TipoGrafo; var Raiz: TipoValorVertice);
var Antecessor: array[TipoValorVertice] of integer;
    P         : array[TipoValorVertice] of TipoPeso;
    Itensheap : array[TipoValorVertice] of boolean;
    Pos       : array[TipoValorVertice] of TipoValorVertice;
    A         : TipoVetor; u, v       : TipovalorVertice;
{-- Entram aqui os operadores de uma das implementações de grafos, bem como o ope-
rador Constroi da implementação de filas de prioridades, assim como os operadores Re-
fazInd, RetiraMinInd e DiminuiChaveInd do Programa Constroi--}
begin { Dijkstra }
  for u := 0 to Grafo.NumVertices do
    begin {Constroi o heap com todos os valores igual a INFINITO}
    Antecessor[u] := -1; p[u] := INFINITO;
    A[u+1].Chave := u; {Heap a ser construido}
    ItensHeap[u] := true; Pos[u] := u+1;
    end;
  n := Grafo.NumVertices; p[Raiz] := 0;
  Constroi (A);
```

Algoritmo de Dijkstra: Implementação

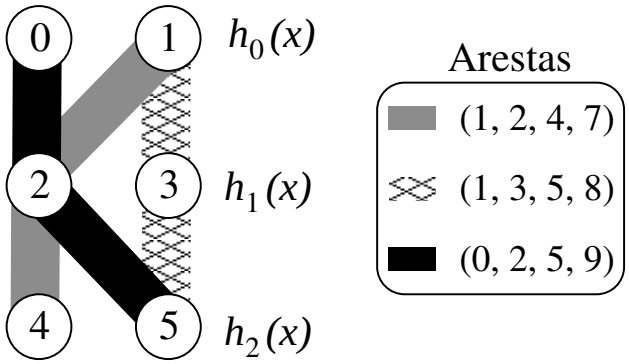
```
while n >= 1 do {enquanto heap nao vazio}
begin
u := RetiraMinInd(A).Chave;  ItensHeap[u] := false;
if not ListaAdjVazia (u,Grafo)
then begin
      Aux := PrimeiroListaAdj (u,Grafo);  FimListaAdj := false;
      while not FimListaAdj do
        begin
        ProxAdj (u, Grafo, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
        if p[v] > p[u] + Peso
        then begin
              p[v]:=p[u]+Peso; Antecessor[v]:=u; DiminuiChaveInd(Pos[v],p[v],A);
              write('Caminho: v[',v,'] v[',Antecessor[v],']',' d[',p[v],']');readln;
              end;
        end;
      end;
   end;
end; { Dijkstra }
```

Porque o Algoritmo de Dijkstra Funciona

- O algoritmo usa uma estratégia gulosa: sempre escolher o vértice mais leve (ou o mais perto) em $V - S$ para adicionar ao conjunto solução S,
- O algorimo de Dijkstra sempre obtém os caminhos mais curtos, pois cada vez que um vértice é adicionado ao conjunto S temos que $p[u] = \delta(Raiz, u)$.

O Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

- Um **h**ipergrafo ou $r-$grafo é um grafo não direcionado $G_r = (V, A)$ no qual cada aresta $a \in A$ conecta r vértices, sendo r a ordem do hipergrafo.
- Os grafos estudados até agora são 2-grafos (hipergrafos de ordem 2).
- Hipergrafos são utilizados na Seção 5.5.4 sobre ***hashing* perfeito**.
- A figura apresenta um 3-grafo contendo os vértices $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, as arestas $\{(1, 2, 4), (1, 3, 5), (0, 2, 5)\}$ e os pesos 7, 8 e 9, respectivamente.



O Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo: Operações

1. Criar um hipergrafo vazio. A operação retorna um hipergrafo contendo $|V|$ vértices e nenhuma aresta.
2. Inserir uma aresta no hipergrafo. Recebe a aresta $(V_1, V_2, \ldots, V_r)$ e seu peso para serem inseridos no hipergrafo.
3. Verificar se existe determinada aresta no hipergrafo: retorna *true* se a aresta $(V_1, V_2, \ldots, V_r)$ estiver presente, senão retorna *false*.
4. Obter a lista de arestas incidentes em determinado vértice. Essa operação será tratada separadamente logo a seguir.
5. Retirar uma aresta do hipergrafo. Retira a aresta $(V_1, V_2, \ldots, V_r)$ do hipergrafo e a retorna.
6. Imprimir um hipergrafo.
7. Obter a aresta de menor peso de um hipergrafo. A operação retira a aresta de menor peso dentre as arestas do hipergrafo e a retorna.

O Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo: Operações

- Uma operação que aparece com frequência é a de obter a lista de arestas incidentes em determinado vértice.
- Para implementar esse operador de forma independente da representação escolhida para a aplicação em pauta, precisamos de três operações sobre hipergrafos, a saber:
  1. Verificar se a lista de arestas incidentes em um vértice v está vazia. A operação retorna *true* se a lista estiver vazia, senão retorna *false*.
  2. Obter a primeira aresta incidente a um vértice v, caso exista.
  3. Obter a próxima aresta incidente a um vértice v, caso exista.

O Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo: Operações

- A forma mais adequada para representar um hipergrafo é por meio de estruturas de dados em que para cada vértice v do grafo é mantida uma lista das arestas que incidem sobre o vértice v, o que implica a representação explícita de cada aresta do hipergrafo.
- Essa é uma estrutura orientada a arestas e não a vértices como as representações apresentadas até agora.
- Existem duas representações usuais para hipergrafos: as matrizes de incidência e as listas de incidência.

Implementação por Matrizes de Incidência

- A **m**atriz de incidência de $G_r = (V, A)$ contendo n vértices e m arestas é uma matriz $n \times m$ de *bits*, em que $A[i, j] = 1$ se o vértice i participar da aresta j.
- Para hipergrafos ponderados, $A[i, j]$ contém o rótulo ou peso associado à aresta e a matriz não é de *bits*.
- Se o vértice i não participar da aresta j, então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como rótulo ou peso, tal como 0 ou branco.
- A figura ilustra a representação por matrizes de incidência para o hipergrafo do slide 119.

	0	1	2
0			9
1	7	8	
2	7		9
3		8	
4	7		
5		8	9

Implementação por Matrizes de Incidência

- A representação por matrizes de incidência demanda muita memória para hipergrafos **d**ensos, em que $|A|$ é próximo de $|V|^2$.
- Nessa representação, o tempo necessário para acessar um elemento é independente de $|V|$ ou $|A|$.
- Logo, essa representação é muito útil para algoritmos em que necessitamos saber com rapidez se um vértice participa de determinada aresta.
- A maior desvantagem é que a matriz necessita $\Omega(|V|^3)$ de espaço. Isso significa que simplesmente ler ou examinar a matriz tem complexidade de tempo $O(|V|^3)$.

Implementação por Matrizes de Incidência

```
const MAXNUMVERTICES = 100;
      MAXNUMARESTAS = 4500;  MAXR = 5;
type TipoValorVertice      = 0..MAXNUMVERTICES;
     TipoValorAresta       = 0..MAXNUMARESTAS;
     Tipor                 = 0..MAXR;
     TipoPesoAresta        = integer;
     TipoArranjoVertices = array[Tipor] of TipoValorVertice;
     TipoAresta            = record
                               Vertices: TipoArranjoVertices;
                               Peso    : TipoPesoAresta;
                             end;
     TipoGrafo = record
                   Mat: array[TipoValorVertice, TipoValorAresta] of TipoPesoAresta;
                   NumVertices     : TipoValorVertice;
                   NumArestas      : TipoValorAresta;
                   ProxDisponivel: TipoValorAresta;
                   r               : Tipor;
                 end;
     TipoApontador = TipoValorAresta;
```

Implementação por Matrizes de Incidência

- No campo Mat os itens são armazenados em um **a**rray de duas dimensões de tamanho suficiente para armazenar o grafo.
- As constantes MaxNumVertices e MaxNumArestas definem o maior número de vértices e de arestas que o grafo pode ter e r define o número de vértices de cada aresta.
- Uma possível implementação para as primeiras seis operações definidas anteriormente é mostrada no slide a seguir.
- O procedimento ArestasIguais permite a comparação de duas arestas, a um custo $O(r)$.
- O procedimento InsereAresta tem custo $O(r)$ e os procedimentos ExisteAresta e RetiraAresta têm custo $r \times |A|$, o que pode ser considerado $O(|A|)$ porque r é geralmente uma constante pequena.

Implementação por Matrizes de Incidência

```
function ArestasIguais (var Vertices: TipoArranjoVertices;
                        NumAresta:TipoValorAresta; var Grafo:TipoGrafo): boolean;
var Aux: boolean;  v: Tipor;
begin
  Aux := true;  v := 0;
  while (v < Grafo.r) and Aux do
    begin if Grafo.Mat[Vertices[v], NumAresta] <= 0 then Aux:=false;  v:=v+1; end;
  ArestasIguais := Aux;
end; { ArestasIguais }

procedure FGVazio (var Grafo: TipoGrafo);
var i, j: integer;
begin
  Grafo.ProxDisponivel := 0;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices do
    for j := 0 to Grafo.NumArestas do Grafo.Mat[i, j] := 0;
end; { FGVazio }
```

Implementação por Matrizes de Incidência

```
procedure InsereAresta (var Aresta: TipoAresta; var Grafo : TipoGrafo);
var i: integer;
begin
  if Grafo.ProxDisponivel = MAXNUMARESTAS + 1
  then writeln ('Nao ha espaco disponivel para a aresta')
  else begin
       for i := 0 to Grafo.r - 1 do Grafo.Mat[Aresta.Vertices[i],Grafo.ProxDisponivel]:=Aresta.Peso;
       Grafo.ProxDisponivel := Grafo.ProxDisponivel + 1;
       end;
end; { InsereAresta }
function ExisteAresta (var Aresta: TipoAresta; var Grafo : TipoGrafo): boolean;
var ArestaAtual: TipoValorAresta;  EncontrouAresta: boolean;
begin
  EncontrouAresta := false;  ArestaAtual := 0;
  while (ArestaAtual < Grafo.NumArestas) and not EncontrouAresta do
    begin
    if ArestasIguais(Aresta.Vertices, ArestaAtual, Grafo) then EncontrouAresta := true;
    ArestaAtual := ArestaAtual + 1;
    end;
  ExisteAresta := EncontrouAresta;
end; { ExisteAresta }
```

Implementação por Matrizes de Incidência

```
function RetiraAresta (var Aresta: TipoAresta; var Grafo : TipoGrafo): TipoAresta;
var ArestaAtual: TipoValorAresta;  i: integer;  EncontrouAresta: boolean;
begin
  EncontrouAresta := false;  ArestaAtual := 0;
  while (ArestaAtual < Grafo.NumArestas) and not EncontrouAresta do
    begin
    if ArestasIguais (Aresta.Vertices, ArestaAtual, Grafo)
    then begin
          EncontrouAresta := true;
          Aresta.Peso := Grafo.Mat[Aresta.Vertices[0], ArestaAtual];
          for i := 0 to Grafo.r − 1 do
            Grafo.Mat[Aresta.Vertices[i], ArestaAtual] := −1;
          end;
    ArestaAtual := ArestaAtual + 1;
    end;
  RetiraAresta := Aresta;
end; { RetiraAresta }
```

Implementação por Matrizes de Incidência

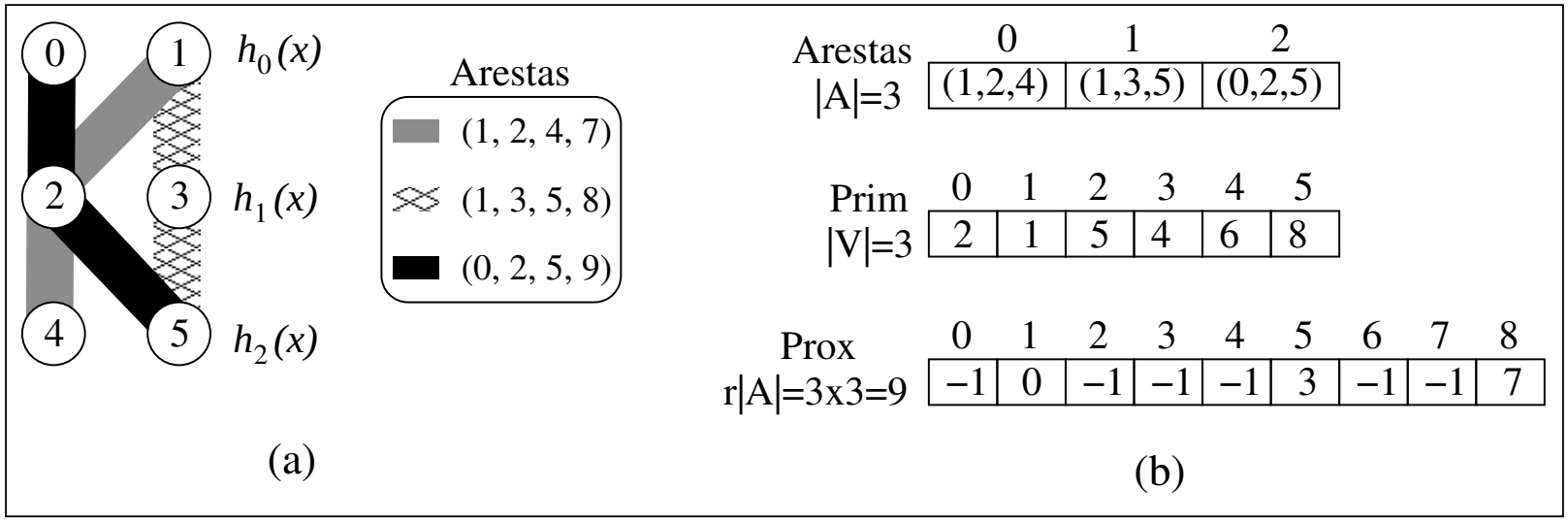
```
procedure ImprimeGrafo (var Grafo : TipoGrafo);
var i, j: integer;
begin
  write ('    ');
  for i := 0 to Grafo.NumArestas-1 do write (i:3);  writeln;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices-1 do
    begin
    write (i:3); for j := 0 to Grafo.NumArestas-1 do write (Grafo.mat[i,j]:3); writeln;
    end;
end; { ImprimeGrafo }

function ListaIncVazia (var Vertice: TipoValorVertice; var Grafo  : TipoGrafo): boolean;
var ArestaAtual: TipoApontador;  ListaVazia: boolean;
begin
  ListaVazia := true;  ArestaAtual := 0;
  while (ArestaAtual < Grafo.NumArestas) and ListaVazia do
   if Grafo.Mat[Vertice,ArestaAtual]>0 then ListaVazia:=false else ArestaAtual:=ArestaAtual+1;
  ListaIncVazia := ListaVazia = true;
end; { ListaIncVazia }
```

Implementação por Matrizes de Incidência

```
function PrimeiroListaInc(var Vertice:TipoValorVertice; var Grafo:TipoGrafo):TipoApontador;
var ArestaAtual: TipoApontador;  ListaVazia: boolean;
begin
  ListaVazia := true;  ArestaAtual := 0;
  while (ArestaAtual < Grafo.NumArestas) and ListaVazia do
    if Grafo.Mat[Vertice, ArestaAtual] > 0
    then begin PrimeiroListaInc := ArestaAtual; ListaVazia := false; end
    else ArestaAtual := ArestaAtual + 1;
  if ArestaAtual = Grafo.NumArestas then writeln ('Erro: Lista incidencia vazia');
end; { PrimeiroListaInc }

procedure ProxArestaInc (var Vertice: TipoValorVertice;  var Grafo: TipoGrafo;
                         var Inc: TipoValorAresta;  var Peso: TipoPesoAresta;
                         var Prox: TipoApontador;  var FimListaAdj: boolean);
begin {--Retorna proxima aresta Inc apontada por Prox--}
  Inc := Prox;  Peso := Grafo.Mat[Vertice,Prox];  Prox := Prox + 1;
  while (Prox < Grafo.NumArestas) and (Grafo.Mat[Vertice, Prox] = 0) do Prox:=Prox+1;
  FimListaAdj := (Prox = Grafo.NumArestas);
end; { ProxArestaInc }
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

- A estrutura de dados usada para representar $G_r = (V, A)$ por meio de listas de incidência foi proposta por Ebert (1987).
- A estrutura usa arranjos para armazenar as arestas e as listas de arestas incidentes a cada vértice. A parte (a) da figura mostra o mesmo 3-grafo de 6 vértices e 3 arestas visto anteriormente e a parte (b) a sua representação por listas de incidência.



Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

- As arestas são armazenadas no arranjo $Arestas$. Em cada posição a do arranjo são armazenados os r vértices da aresta a e o seu $Peso$.
- As listas de arestas incidentes nos vértices do hipergrafo são armazenadas nos arranjos $Prim$ e $Prox$.
- O elemento $Prim[v]$ define o ponto de entrada para a lista de arestas incidentes no vértice v, enquanto $Prox[Prim[v]]$, $Prox[Prox[Prim[v]]]$ e assim por diante definem as arestas subsequentes que contêm v.
- $Prim$ deve possuir $|V|$ entradas, uma para cada vértice.
- $Prox$ deve possuir $r|A|$ entradas, pois cada aresta a é armazenada na lista de arestas incidentes a cada um de seus r vértices.
- A complexidade de espaço é $O(|V| + |A|)$, pois $Arestas$ tem tamanho $O(|A|)$, $Prim$ tem tamanho $O(|V|)$ e $Prox$ tem tamanho $r \times |A| = O(|A|)$, porque r é geralmente uma constante pequena.

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

- Para descobrir quais são as arestas que contêm determinado vértice v, é preciso percorrer a lista de arestas que inicia em $Prim[v]$ e termina quando $Prox[\ldots Prim[v] \ldots] = -1$.
- Assim, para se ter acesso a uma aresta a armazenada em $Arestas[a]$, é preciso tomar os valores armazenados nos arranjos $Prim$ e $Prox$ módulo $|A|$. O valor -1 é utilizado para finalizar a lista.
- Por exemplo, ao se percorrer a lista das arestas do vértice 2, os valores $\{5, 3\}$ são obtidos, os quais representam as arestas que contêm o vértice 2 (arestas 2 e 0), ou seja, $\{5 \bmod 3 = 2, 3 \bmod 3 = 0\}$.

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

- Os valores armazenados em $Prim$ e $Prox$ são obtidos pela equação $i = a + j|A|$, $0 \leq j \leq r - 1$, e a um índice de uma aresta no arranjo $Arestas$. As entradas de $Prim$ são iniciadas com -1.
- Ao inserir a aresta $a = 0$ contendo os vértices $(1, 2, 4)$, temos que:
  $i = 0 + 0 \times 3 = 0$, $Prox[i = 0] = Prim[1] = -1$ e $Prim[1] = i = 0$,
  $i = 0 + 1 \times 3 = 3$, $Prox[i = 3] = Prim[2] = -1$ e $Prim[2] = i = 3$,
  $i = 0 + 2 \times 3 = 6$, $Prox[i = 6] = Prim[4] = -1$ e $Prim[4] = i = 6$.
- Ao inserir a aresta $a = 1$ contendo os vértices $(1, 3, 5)$ temos que:
  $i = 1 + 0 \times 3 = 1$, $Prox[i = 1] = Prim[1] = 0$ e $Prim[1] = i = 1$,
  $i = 1 + 1 \times 3 = 4$, $Prox[i = 4] = Prim[3] = -1$ e $Prim[3] = i = 4$,
  $i = 1 + 2 \times 3 = 7$, $Prox[i = 7] = Prim[5] = -1$ e $Prim[5] = i = 7$.
- Ao inserir a aresta $a = 2$ contendo os vértices $(0, 2, 5)$ temos que:
  $i = 2 + 0 \times 3 = 2$, $Prox[i = 2] = Prim[0] = -1$ e $Prim[0] = i = 2$,
  $i = 2 + 1 \times 3 = 5$, $Prox[i = 5] = Prim[2] = 3$ e $Prim[2] = i = 5$,
  $i = 2 + 2 \times 3 = 8$, $Prox[i = 8] = Prim[5] = 7$ e $Prim[5] = i = 8$.

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

- O programa a seguir apresenta a estrutura de dados utilizando listas de incidência implementadas por meio de arranjos.
- A estrutura de dados contém os três arranjos necessários para representar um hipergrafo, como ilustrado na figura do slide 132:
  - A variável r é utilizada para armazenar a ordem do hipergrafo.
  - A variável NumVertices contém o número de vértices do hipergrafo.
  - A variável NumArestas contém o número de arestas do hipergrafo.
  - A variável ProxDisponivel contém a próxima posição disponível para inserção de uma nova aresta.

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
const
  MAXNUMVERTICES = 100;
  MAXNUMARESTAS  = 4500;
  MAXR           = 5;
  MAXTAMPROX     = MAXR * MAXNUMARESTAS;
  INDEFINIDO     = -1;
type
  TipoValorVertice     = -1..MAXNUMVERTICES;
  TipoValorAresta      = 0..MAXNUMARESTAS;
  Tipor                = 0..MAXR;
  TipoMaxTamProx       = -1..MAXTAMPROX;
  TipoPesoAresta       = integer;
  TipoArranjoVertices  = array[Tipor] of TipoValorVertice;
  TipoAresta           = record
                           Vertices: TipoArranjoVertices;
                           Peso    : TipoPesoAresta;
                         end;
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
TipoArranjoArestas  = array[TipoValorAresta] of TipoAresta;
TipoGrafo =
  record
    Arestas          : TipoArranjoArestas;
    Prim             : array[TipoValorVertice] of TipoMaxTamProx;
    Prox             : array[TipoMaxTamProx] of TipoMaxTamProx;
    ProxDisponivel   : TipoMaxTamProx;
    NumVertices      : TipoValorVertice;
    NumArestas       : TipoValorAresta;
    r                : Tipor;
  end;
TipoApontador = integer;
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

- Uma possível implementação para as primeiras seis operações definidas anteriormente é mostrada no programa a seguir.
- O procedimento ArestasIguais permite a comparação de duas arestas cujos vértices podem estar em qualquer ordem (custo $O(r^2)$).
- O procedimento InsereAresta insere uma aresta no grafo (custo $O(r)$).
- O procedimento ExisteAresta verifica se uma aresta está presente no grafo (custo equivalente ao **g**rau de cada vértice da aresta no grafo).
- O procedimento RetiraAresta primeiro localiza a aresta no grafo, retira a mesma da lista de arestas incidentes a cada vértice em Prim e Prox e marca a aresta como removida no arranjo Arestas. A aresta marcada no arranjo Arestas não é reutilizada, pois não mantemos uma lista de posições vazias.

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
function ArestasIguais (var V1: TipoArranjoVertices;
                        var NumAresta: TipoValorAresta; var Grafo: TipoGrafo): boolean;
var i, j: Tipor;  Aux : boolean;
begin
  Aux := true;  i := 0;
  while (i < Grafo.r) and Aux do
    begin
    j := 0;
    while (V1[i] <> Grafo.Arestas[NumAresta].Vertices[j]) and (j < Grafo.r) do j := j + 1;
    if j = Grafo.r then Aux := false;  i := i + 1;
    end;
  ArestasIguais := Aux;
end; { ArestasIguais }
procedure FGVazio (var Grafo: TipoGrafo);
var i: integer;
begin
  Grafo.ProxDisponivel := 0;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices − 1 do Grafo.Prim[i] := −1;
end; { FGVazio }
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
procedure InsereAresta (var Aresta: TipoAresta; var Grafo : TipoGrafo);
var i, Ind: integer;
begin
if Grafo.ProxDisponivel = MAXNUMARESTAS + 1
then writeln ('Nao ha espaco disponivel para a aresta')
else begin
      Grafo.Arestas[Grafo.ProxDisponivel] := Aresta;
      for i := 0 to Grafo.r − 1 do
        begin
        Ind := Grafo.ProxDisponivel + i ∗ Grafo.NumArestas;
        Grafo.Prox[Ind] := Grafo.Prim[Grafo.Arestas[Grafo.ProxDisponivel].Vertices[i]];
        Grafo.Prim[Grafo.Arestas[Grafo.ProxDisponivel].Vertices[i]] := Ind;
        end;
      end;
      Grafo.ProxDisponivel := Grafo.ProxDisponivel + 1;
end; { InsereAresta }
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
function ExisteAresta (var Aresta: TipoAresta; var Grafo : TipoGrafo): boolean;
var v: Tipor;  A1: TipoValorAresta;
    Aux: integer;  EncontrouAresta: boolean;
begin
  EncontrouAresta := false;
  for v := 0 to Grafo.r − 1 do
    begin
    Aux := Grafo.Prim[Aresta.Vertices[v]];
    while (Aux <> −1) and not EncontrouAresta do
      begin
      A1 := Aux mod Grafo.NumArestas;
      if ArestasIguais (Aresta.Vertices, A1, Grafo) then EncontrouAresta := true;
      Aux := Grafo.Prox[Aux];
      end;
    end;
  ExisteAresta := EncontrouAresta;
end; { ExisteAresta }
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
function RetiraAresta (var Aresta: TipoAresta; var Grafo : TipoGrafo): TipoAresta;
var Aux, Prev, i: integer;  A1: TipoValorAresta;   v: Tipor;
begin
  for v := 0 to Grafo.r − 1 do
    begin
    Prev := INDEFINIDO;  Aux := Grafo.Prim[Aresta.Vertices[v]];  A1 := Aux mod Grafo.NumArestas;
    while (Aux >= 0) and not ArestasIguais (Aresta.Vertices, A1, Grafo) do
      begin Prev := Aux;  Aux := Grafo.Prox[Aux];  A1 := Aux mod Grafo.NumArestas; end;
    if Aux >= 0
    then begin  { Achou }
          if Prev = INDEFINIDO
          then Grafo.Prim[Aresta.vertices[v]] := Grafo.Prox[Aux]
          else Grafo.Prox[Prev] := Grafo.Prox[Aux];
          end;
    { else writeln ('Nao existe aresta ou foi retirada antes'); }
    end;
  RetiraAresta := Grafo.Arestas[A1];
  for i := 0 to Grafo.r−1 do Grafo.Arestas[A1].Vertices[i]:=INDEFINIDO;
  Grafo.Arestas[A1].Peso := INDEFINIDO;
end; { RetiraAresta }
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
procedure ImprimeGrafo (var Grafo : TipoGrafo);
var i, j: integer;
begin
  writeln (' Arestas: Num Aresta, Vertices, Peso ');
  for i := 0 to Grafo.NumArestas - 1 do
    begin
    write (i:2);  for j := 0 to Grafo.r - 1 do write (Grafo.Arestas[i].Vertices[j]:3);
    writeln (Grafo.Arestas[i].Peso:3);
    end;
  writeln ('Lista arestas incidentes a cada vertice: ');
  for i := 0 to Grafo.NumVertices - 1 do
    begin
    write (i:2);  j := Grafo.Prim[i];
    while j <> INDEFINIDO do
      begin write (j mod Grafo.NumArestas:3);  j := Grafo.Prox[j]; end;
    writeln;
    end;
end; { ImprimeGrafo }
```

Implementação por Listas de Incidência Usando Arranjos

```
{—Operadores para obter a lista de arestas incidentes a um vertice—}
function ListaIncVazia (var Vertice: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo): boolean;
begin
  ListaIncVazia := Grafo.Prim[Vertice] = −1;
end;
function PrimeiroListaInc (var Vertice: TipoValorVertice;
                           var Grafo: TipoGrafo): TipoApontador;
begin
  PrimeiroListaInc := Grafo.Prim[Vertice];
end;
procedure ProxArestaInc (var Vertice: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo;
                         var Inc: TipoValorAresta; var Peso: TipoPesoAresta;
                         var Prox: TipoApontador; var FimListaInc: boolean);
{—Retorna Inc apontado por Prox—}
begin
  Inc := Prox mod Grafo.NumArestas;  Peso := Grafo.Arestas[Inc].Peso;
  if Grafo.Prox[Prox] = INDEFINIDO then FimListaInc := true else Prox := Grafo.Prox[Prox];
end; { ProxArestaInc }
```

Programa Teste para Operadores do Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

```
program TestaOperadoresTADHipergrafo;
{-- Entram aqui tipos do Slide 125 ou do Slide 137--}
var Ap          : TipoApontador;
    i, j        : integer;
    Inc         : TipoValorAresta;
    A1          : TipoValorAresta;
    V1          : TipoValorVertice;
    Aresta      : TipoAresta;
    Peso        : TipoPesoAresta;
    Grafo       : TipoGrafo;
    FimListaInc : boolean;
{-- Entram aqui operadores do Slide 127 ou do Slide 138--}
begin {-- Programa principal--}
  write ('Hipergrafo r: '); readln (Grafo.r);
  write ('No. vertices: '); readln (Grafo.NumVertices);
  write ('No. arestas: '); readln (Grafo.NumArestas);
  FGVazio (Grafo);
```

Programa Teste para Operadores do Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

```
for i := 0 to Grafo.NumArestas−1 do
  begin
  write ('Insere Aresta e Peso: '); for j := 0 to Grafo.r − 1 do read (Aresta.Vertices[j]);
  readln (Aresta.Peso); InsereAresta (Aresta, Grafo);
  end;
ImprimeGrafo (Grafo); readln;
write ('Lista arestas incidentes ao vertice: '); read (V1);
if not ListaIncVazia (V1, Grafo)
then begin
     Ap := PrimeiroListaInc (V1, Grafo); FimListaInc := false;
     while not FimListaInc do
       begin
       ProxArestaInc (V1, Grafo, Inc, Peso, Ap, FimListaInc);
       write (Inc mod Grafo.NumArestas:2, ' (', Peso, ')');
       end;
     writeln; readln;
     end
else writeln ('Lista vazia');
```

Programa Teste para Operadores do Tipo Abstrato de Dados Hipergrafo

```
  write ('Existe aresta: ');
  for j := 0 to Grafo.r - 1 do read (Aresta.Vertices[j]);  readln;
  if ExisteAresta (Aresta,Grafo) then writeln ('Sim') else writeln ('Nao');
  write ('Retira aresta: ');
  for j := 0 to Grafo.r - 1 do read (Aresta.Vertices[j]); readln;
  if ExisteAresta (Aresta, Grafo)
  then begin
       Aresta := RetiraAresta (Aresta, Grafo);
       write ('Aresta retirada:');
       for i := 0 to Grafo.r - 1 do write (Aresta.Vertices[i]:3);
       writeln (Aresta.Peso:4);
       end
  else writeln ('Aresta nao existe');
  ImprimeGrafo (Grafo);
end.
```