Fundamentos da Teoria da Computação — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2006

Professor: Newton José Vieira — DCC/ICEx/UFMG

Solução da primeira lista de exercícios

1. Sobre conjuntos enumeráveis:

   (a) Prove que o conjunto de números inteiros ímpares é enumerável.

   (b) Prove que o conjunto $\{\mathtt{0}\}^*$ é enumerável.

   (c) Prove que o conjunto $\mathcal{P}(\{\mathtt{0}\}^*)$ não é enumerável.

   Solução:

   (a) Uma função bijetora dos naturais para os inteiros ímpares seria f tal que $f(n) = n+1$, se n é par, e $f(n) = -n$, se n é ímpar.

   (b) Uma função bijetora dos naturais para o conjunto $\{\mathtt{0}\}^*$ seria g tal que $g(n) = \mathtt{0}^n$.

   (c) Suponha que o conjunto $\mathcal{P}(\{\mathtt{0}\}^*)$ seja enumerável. Seja, então, uma enumeração $C_0, C_1, C_2, \ldots$ dos conjuntos em $\mathcal{P}(\{\mathtt{0}\}^*)$. Definamos o conjunto X da seguinte forma:

   $$\text{para todo } n \in \mathbf{N} : \mathtt{a}^n \in X \text{ se, e somente se, } \mathtt{a}^n \notin C_n.$$

   Se a enumeração existe mesmo, então X deve ser algum conjunto da seqüência; seja, então $X = C_k$. Segue-se que $\mathtt{a}^k \in C_k$ se, e somente se, $\mathtt{a}^k \notin C_k$, o que é contraditório! Conclui-se que $\mathcal{P}(\{\mathtt{0}\}^*)$ não é enumerável.

2. Faça definições recursivas tradicionais (sem uso de gramática) para as linguagens:

   (a) $\{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\}^*$

   (b) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \geq 0\}$

   (c) $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid w \text{ não contém } \mathtt{00} \text{ nem } \mathtt{11}\}$

   Solução:

   (a) a) $\lambda \in L$;
       b) se $x \in L$, então $\mathtt{0}x \in L$ e $x\mathtt{1} \in L$.

   (b) a) $\lambda \in L$;
       b) se $x \in L$, então $\mathtt{0}x\mathtt{1} \in L$.

   (c) a) $\lambda, \mathtt{0}, \mathtt{1} \in L$;
       b) se $x\mathtt{0} \in L$, então $x\mathtt{01} \in L$;
       se $x\mathtt{1} \in L$, então $x\mathtt{10} \in L$.

3. Sejam $\Sigma = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$, $A = \Sigma^5$ e $B = \{\mathtt{0}\}\Sigma^*$. Para cada uma das linguagens abaixo, dê uma propriedade necessária e suficiente para que uma palavra pertença à mesma. Não precisa dizer que a palavra deve conter apenas 0s e 1s (fica implícito).

   (a) $A \cap B$.

   (b) AB.

   (c) $B - A$.

   (d) A^*.

   (e) B^+.

   (f) $A^* \cap B^*$.

Exemplo: uma propriedade necessária e suficiente para que uma palavra pertença a $A - B$ é: começa com 1 e tem 5 símbolos.

Solução:

(a) Começa com 0 e tem 5 símbolos.
(b) Tem pelo menos 6 símbolos e o sexto é 0.
(c) Começa com 0 e não tem 5 símbolos.
(d) Tem tamanho múltiplo de 5.
(e) Começa com 0.
(f) Começa com 0 (se não for λ) e tem tamanho múltiplo de 5.

4. Descreva as linguagens a seguir, todas sobre o alfabeto $\{0, 1\}$, usando apenas conjuntos finitos, operações sobre conjuntos, concatenação e fecho de Kleene. Procure obter uma descrição bem concisa.

   (a) O conjunto das palavras da forma 0^m1^n, em que m é par e n é ímpar.
   (b) O conjunto das palavras em que entre cada par de 0s há uma subpalavra 1^n, sendo n par. Observe que antes do primeiro 0 ou após o último 0 pode ocorrer um número ímpar de 1s, *se a palavra tiver* 0*s*.
   (c) O conjunto das palavras que contêm 00 ou 11 ou ambas.
   (d) O conjunto das palavras que contêm 00 ou 11, mas não ambas.
   (e) O conjunto das palavras que contêm 00 e 11.
   (f) O conjunto das palavras que contêm 00, mas não 11.
   (g) O conjunto das palavras que não contêm 00, nem 11.
   (h) O conjunto das palavras de tamanho par que não contêm 00.
   (i) O conjunto das palavras com tamanho múltiplo de 3.
   (j) O conjunto das palavras nas quais o número de 1's é múltiplo de 3.
   (k) O conjunto das palavras nas quais o número de 1's é múltiplo de 3, exceto aquelas com um número par de símbolos.

Solução:

(a) $\{00\}^*\{1\}\{11\}^*$.
(b) $\{1\}^*(\{0\}\{11\}^*)^*\{\lambda, 1\}$.
(c) $\{0,1\}^*\{00,11\}\{0,1\}^*$.
(d) $\{0,1\}^*\{00,11\}\{0,1\}^* - (\{0,1\}^*\{00\}\{0,1\}^* \cap \{0,1\}^*\{11\}\{0,1\}^*)$.
(e) $\{0,1\}^*\{00\}\{0,1\}^* \cap \{0,1\}^*\{11\}\{0,1\}^*$.
(f) $\{0,1\}^*\{00\}\{0,1\}^* - \{0,1\}^*\{11\}\{0,1\}^*$.
(g) $\{0,1\}^* - \{0,1\}^*\{00,11\}\{0,1\}^*$.
(h) $(\{0,1\}^2)^* - \{0,1\}^*\{00\}\{0,1\}^*$.
(i) $(\{0,1\}^3)^*$.
(j) $(\{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\})^*\{0\}^*$.
(k) $(\{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\})^*\{0\}^* - (\{0,1\}^2)^*$.

5. Identifique as linguagens que são geradas pelas gramáticas a seguir:

   (a) $G_1 = (\{P, Z\}, \{0, 1\}, R_1, P)$.
   R_1: $P \to 0P1 \mid Z$

$Z \to \texttt{0}Z \mid \texttt{0}$

(b) $G_2 = (\{P, Z, U\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, R_2, P)$.

R_2: $P \to \texttt{0}P\texttt{1} \mid Z \mid U$
$Z \to \texttt{0}Z \mid \texttt{0}$
$U \to U\texttt{1} \mid \texttt{1}$

(c) $G_3 = (\{S, X\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, R_3, S)$.

R_2: $S \to \texttt{00}S \mid \texttt{1}X \mid \lambda$
$X \to \texttt{00}X \mid \texttt{1}S$

(d) $G_4 = (\{P, X\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}, R_4, P)$.

R_4: $P \to \texttt{a}P\texttt{a} \mid X$
$X \to \texttt{b}X\texttt{c} \mid X\texttt{c} \mid \lambda$

(e) $G_5 = (\{P, A, B, F\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, R_5, P)$.

R_5: $P \to \texttt{a}AP \mid \texttt{b}BP \mid F$
$A\texttt{a} \to \texttt{a}A$
$A\texttt{b} \to \texttt{b}A$
$B\texttt{a} \to \texttt{a}B$
$B\texttt{b} \to \texttt{b}B$
$AF \to F\texttt{a}$
$BF \to F\texttt{b}$
$F \to \lambda$

(f) $G_6 = (\{P\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, R_6, P)$.

R_6: $P \to \texttt{0}P\texttt{1} \mid \lambda$
$\texttt{01} \to \texttt{10}$

Solução:

(a) $L(G_1) = \{\texttt{0}^k\texttt{1}^n \mid k > n\}$.
(b) $L(G_2) = \{\texttt{0}^k\texttt{1}^n \mid k \neq n\}$.
(c) $L(G_3) = \{\texttt{00}\}^*(\{\texttt{1}\}\{\texttt{00}\}^*\{\texttt{1}\}\{\texttt{00}\}^*)^*$.
(d) $L(G_4) = \{\texttt{a}^n\texttt{b}^i\texttt{c}^j\texttt{a}^n \mid n \geq 0 \text{ e } i < j\}$.
(e) $L(G_5) = \{xx \mid x \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\}$.
(f) $L(G_5) = \{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \mid$ em w, o número de 0s é igual ao de 1s$\}$.

6. Obtenha gramáticas para as seguintes linguagens:

(a) $\{\texttt{0}\}\{\texttt{11}\}^*\{\texttt{0}\}$.
(b) $\{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}, \#\}^* \mid$ toda seqüência de 0's em w vem entre dois #s$\}$.
(c) O conjunto das palavras sobre $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ de tamanho par com pelo menos dois 1s.
(d) $\{\texttt{a}^m\texttt{b}^n \mid m \neq n\}$.

Solução:

(a) $P \to \texttt{0}A\texttt{0}$
$A \to \texttt{11}A \mid \lambda$

(b) $P \to \texttt{1}P \mid \#P \mid \lambda \mid \#\texttt{0}Z$
$Z \to \texttt{0}Z \mid \#\texttt{0}Z \mid \#P$

(c) $P_0 \to \texttt{0}I_0 \mid \texttt{1}I_1$
$I_0 \to \texttt{0}P_0 \mid \texttt{1}P_1$

$$
\begin{aligned}
P_1 &\rightarrow \texttt{0}I_1 \mid \texttt{1}I_2 \\
I_1 &\rightarrow \texttt{0}P_1 \mid \texttt{1}P_2 \\
P_2 &\rightarrow \texttt{0}I_2 \mid \texttt{1}I_2 \mid \lambda \\
I_2 &\rightarrow \texttt{0}P_2 \mid \texttt{1}P_2
\end{aligned}
$$

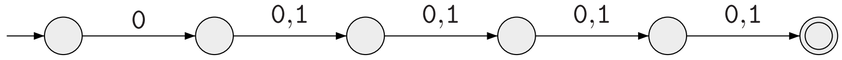
(d)

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \texttt{a}P\texttt{b} \mid A \mid B \\
A &\rightarrow \texttt{a}A \mid \texttt{a} \\
B &\rightarrow \texttt{b}B \mid \texttt{b}
\end{aligned}
$$

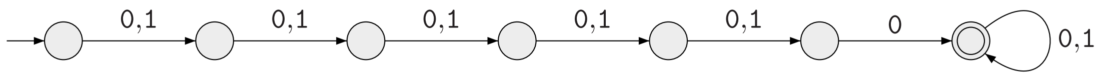
7. Construa autômatos finitos determinísticos (AFDs) que reconheçam as linguagens da questão 3. Apresente apenas os diagramas de estados.

   Solução:

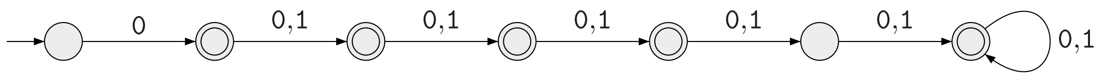
   (a)



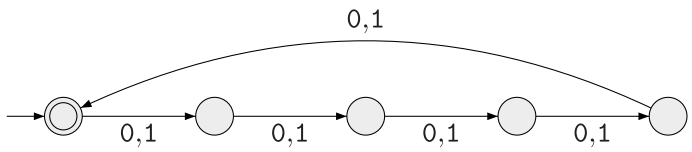
   (b)



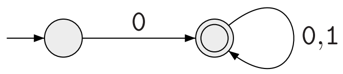
   (c)



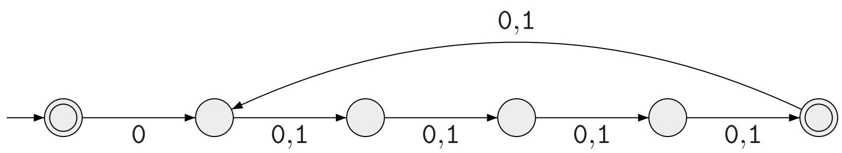
   (d)



   (e)

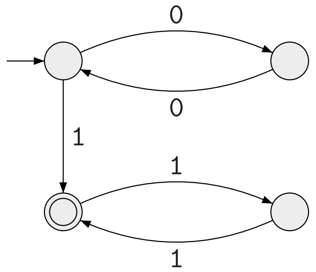


   (f)

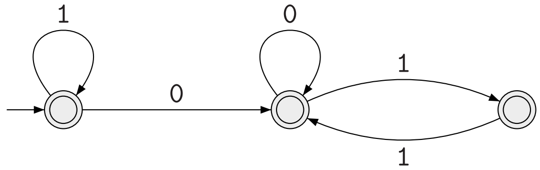


8. Construa autômatos finitos determinísticos (AFDs) que reconheçam as linguagens da questão 4. Apresente apenas os diagramas de estados. *Solução:*

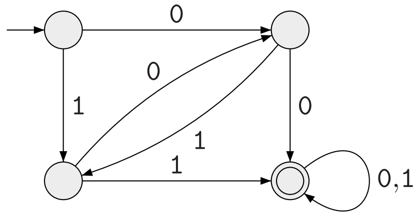
(a)



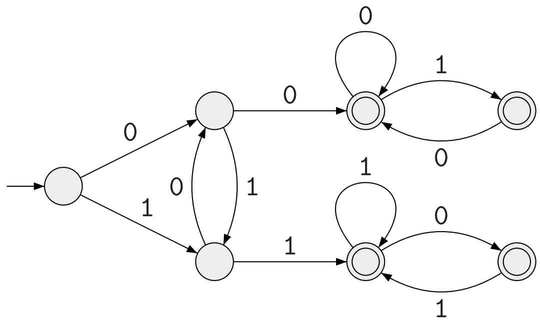
(b)



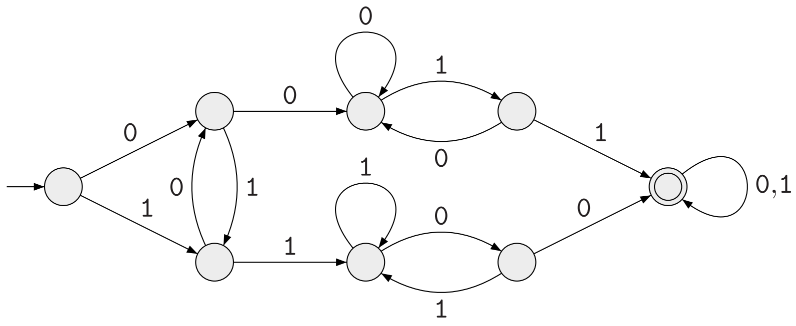
(c)



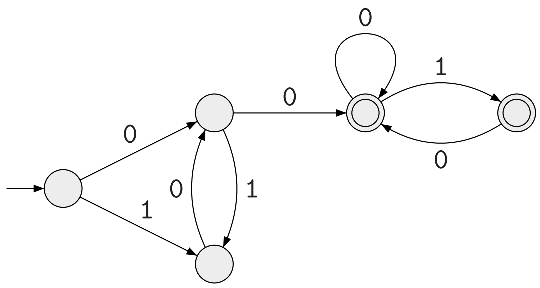
(d)



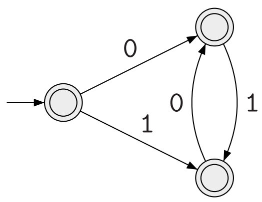
(e)



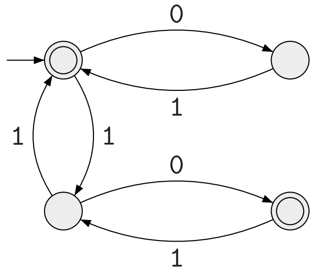
(f)



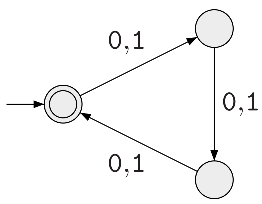
(g)



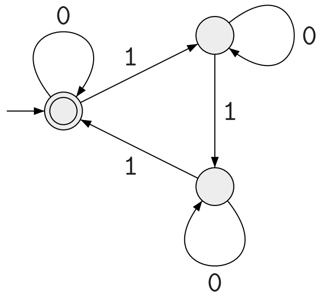
(h)



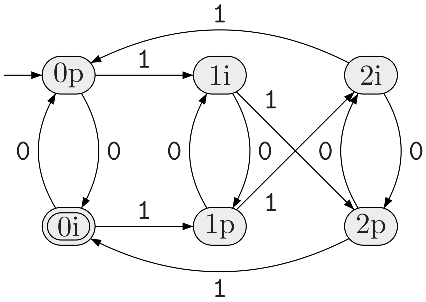
(i)



(j)



(k)



9. Construa AFDs que reconheçam as linguagens a seguir. Apresente apenas os diagramas de estados.

(a) $\{w \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \mid$ toda posição par de w contém $\texttt{1}\}$.

(b) $\{\texttt{01}\}^*\{\texttt{10}\}^*$.

(c) $(\{\texttt{1}\} \cup \{\texttt{0}\}\{\texttt{0},\texttt{1}\})\{\texttt{0},\texttt{1}\}^*$.

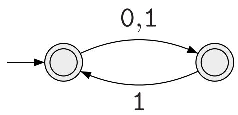
(d) $\{w \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \mid$ o penúltimo símbolo de w é $\texttt{1}\}$.

(e) $\{w \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \mid w$ não contém $\texttt{000}$ nem $\texttt{111}\}$.

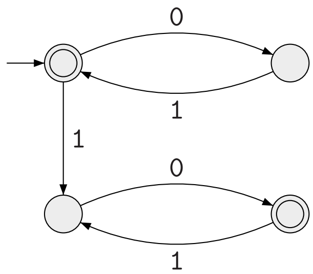
(f) $\{w \in \{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \mid$ em w o símbolo da posição $2i$ é diferente daquele na posição $2i+2$ para cada $i \geq 1\}$. Exemplos de palavras nesta linguagem: qualquer palavra com menos de 4 símbolos, as 4 palavras da forma `a0b1`, onde a e b podem ser `0` ou `1`, as 4 palavras da forma `a1b0` etc.

Solução:

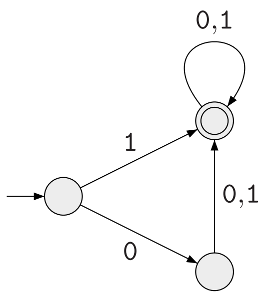
(a)



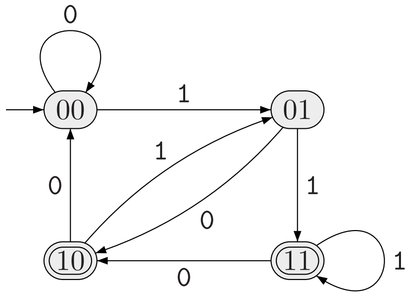
(b)



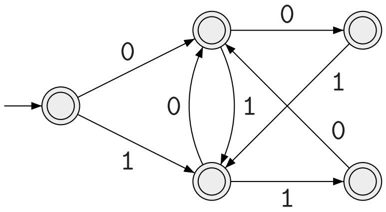
(c)



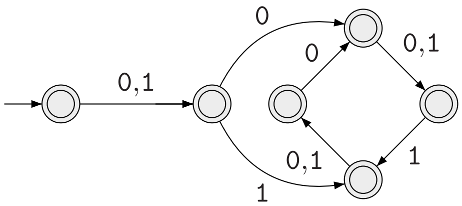
(d)



(e)



(f)



10. Faça AFD's que reconheçam: $X = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \text{ é par}\}$. e $Y = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ não contém } 11\}$. Bastam apenas os diagramas de estados. Em seguida, obtenha o produto dos dois AFD's e explicite que estados finais ele deve ter para reconhecer:

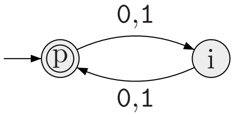
    (a) $X \cap Y$.

    (b) $X \cup Y$.

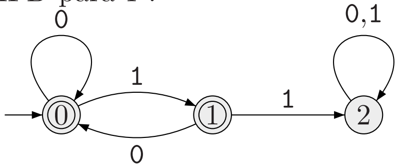
    (c) $X - Y$.

    Solução:

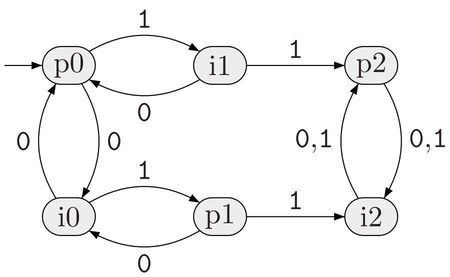
    AFD para X:

    AFD para Y:

    Produto:



(a) $X \cap Y$: $F = \{\mathrm{p0}, \mathrm{p1}\}$.

(b) $X \cup Y$: $F = \{\mathrm{p0}, \mathrm{p1}, \mathrm{p2}, \mathrm{i0}, \mathrm{i1}\}$.

(c) $X - Y$: $F = \{\mathrm{p2}\}$.