Lista de Exercícios Preparatória para a Primeira Prova

1. Faça definições recursivas das seguintes linguagens, considerando a *concatenação* como a operação básica no passo recursivo:[1]

   (a) $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+$.
   (b) $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$.
   (c) $\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*\{\mathtt{0}\}$.
   (d) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^{3n} \mid n \in \mathbf{N}\}$.
   (e) $\{ww^R \mid w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*\}$.
   (f) $\{x_1 + \cdots + x_n \mid n \geq 1 \text{ e } x_i \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+ \text{ para } i = 1,\ldots,n\}$. *Dica*: Faça duas definições recursivas separadas, a primeira definindo o que pode ser cada x_i.

   Um exemplo: uma definição recursiva de $L = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ é:

   (a) $\lambda \in L$;
   (b) se $x \in L$ então $\mathtt{0}x\mathtt{1} \in L$.

   ((a) é a base e (b) é o passo recursivo. A cláusula de fechamento pode ser omitida.)

2. Perguntinhas:

   (a) Que palavras tem cada uma das linguagens a seguir?
   $\emptyset^*$; $\emptyset^+$; $\{\lambda\}^*$; $\{\lambda\}^+$; $\{\mathtt{0}\}^*$; $\{\mathtt{0}\}^+$;$\{\lambda,\mathtt{0}\}^*$; $\{\lambda,\mathtt{0}\}^+$.
   (b) Em que situações L^* e L^+ são finitas?
   (c) Seja Σ um alfabeto. Explique que palavras pertencem a cada uma das linguagens:
   - Σ^n para cada $n \geq 0$; que valor tem $|\Sigma^n|$?
   - $(\Sigma \cup \{\lambda\})^n$ para cada $n \geq 0$; que valor tem $|(\Sigma \cup \{\lambda\})^n|$?

   (d) Sejam $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$, $A = \{\mathtt{a}\}\Sigma^+$ e $B = \Sigma^*\{\mathtt{b}\}$. Apresente uma condição necessária e suficiente para que uma palavra de Σ^* pertença a AA, AB, BB, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$.

3. Descreva as linguagens a seguir, todas sobre o alfabeto $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$, usando apenas *conjuntos finitos* e operações de *união*, *interseção*, *complementação*, *concatenação* e *fecho de Kleene*. Procure obter uma descrição bem concisa.

   (a) O conjunto das palavras de prefixo `01`.
   (b) O subconjunto das palavras de $\{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\}^*$ com número par de `0`s.
   (c) O conjunto das palavras com número par de `0`s.
   (d) O conjunto das palavras com vinte símbolos.
   (e) O conjunto das palavras com no mínimo vinte símbolos.
   (f) O conjunto das palavras com no máximo vinte símbolos.
   (g) O conjunto das palavras que contêm pelo menos um `0` e um `1`.
   (h) O conjunto das palavras que contêm pelo menos um `00`, mas nenhum `11`.
   (i) O conjunto das palavras que não contêm `01` como sufixo.

[1] Veja a Seção 1.7, pág. 28, do livro-texto.

4. Identifique as linguagens que são geradas pelas gramáticas a seguir:

   (a) $G_0 = (\{X, Y\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_0, X)$.
   R_0: $X \to \mathtt{0}X \mid Y$
   $X \to \mathtt{1}Y \mid \mathtt{1}$

   (b) $G_1 = (\{P\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_1, P)$.
   R_1: $P \to \mathtt{a}P\mathtt{a} \mid \mathtt{b}P\mathtt{b} \mid \lambda$

   (c) $G_2 = (\{P, A\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_2, P)$.
   R_2: $P \to \mathtt{0}P\mathtt{0} \mid A$
   $A \to \mathtt{1}A\mathtt{1} \mid \lambda$

   (d) $G_3 = (\{P, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_3, P)$.
   R_3: $P \to \mathtt{a}P \mid X\mathtt{b} \mid \lambda$
   $X \to \mathtt{a}P$

   (e) $G_4 = (\{A, X\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_4, A)$.
   R_4: $A \to XAX \mid X$
   $X \to \mathtt{0}X\mathtt{0} \mid \mathtt{1}X\mathtt{1} \mid \mathtt{0} \mid \mathtt{1}$

   (f) $G_5 = (\{X, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, R_5, X)$.
   R_5: $X \to \mathtt{a}BX \mid \mathtt{abc}$
   $B\mathtt{a} \to \mathtt{a}B$
   $B\mathtt{b} \to \mathtt{b}B$
   $B\mathtt{c} \to \mathtt{bcc}$

5. Obtenha gramáticas para as linguagens da questão 1.

6. Construa autômatos finitos determinísticos (AFDs) que reconheçam as linguagens da questão 3. Apresente apenas os diagramas de estados.

7. Construa AFDs que reconheçam as linguagens a seguir. Apresente apenas os diagramas de estados.

   (a) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid |w| \geq 2$ e o primeiro e o penúltimo símbolos de w são $\mathtt{1}\}$.
   (b) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid$ o último símbolo de w é diferente do primeiro$\}$.
   (c) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid$ os três últimos símbolos de w não são $\mathtt{000}\}$.
   (d) O conjunto das palavras em que todo $\mathtt{0}$ é seguido de pelo menos dois símbolos.

8. Faça AFDs que reconheçam: $X = \{\mathtt{0}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$. e $Y = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{1}\}$. Bastam apenas os diagramas de estados. Em seguida, obtenha o produto dos dois AFDs e explicite que estados finais ele deve ter para reconhecer:

   (a) $X \cap Y$.
   (b) $X \cup Y$.
   (c) $X - Y$.

9. Explique porque se um AFD M reconhece uma palavra de tamanho maior ou igual ao número de estados de M, então $L(M)$ é infinita.

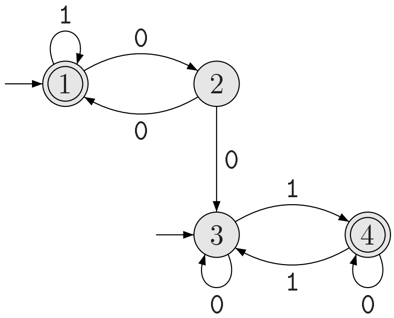
10. Construa AFNs para as seguintes linguagens, com o *menor número de estados e de transições* que conseguir:

(a) O conjunto das palavras de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$, de dois ou mais símbolos, em que o último símbolo seja diferente do primeiro.

(b) O conjunto das palavras de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$ em que o último símbolo tenha ocorrido antes no mínimo uma vez.

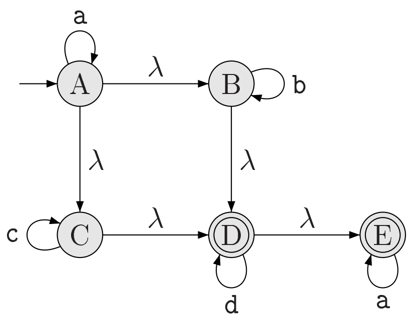
(c) O conjunto das palavras de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$ em que o último símbolo tenha ocorrido antes no máximo duas vezes.

11. Seja o AFN com o diagrama de estados a seguir:



Construa um AFD equivalente usando o método visto em aula (*subset construction*).

12. Seja o AFNλ M:



Construa um AFN N, equivalente a M, usando o método visto em aula.