Fundamentos da Teoria da Computação — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2016
Professor: Newton José Vieira — DCC/ICEx/UFMG
Segunda Prova/Solução do professor — 19/5/2016

1. Sejam $L_1 = \{0^n \mid n \geq 1000\}$ (regular), e $L_2 = \{0^n \mid n$ é número primo$\}$ (não regular). Para cada linguagem a seguir, mostre que ela é regular ou que não é:

   (a) $L_2 - L_1$;

   (b) $L_1 \cap L_2$.

   Solução:

   (a) $L_2 - L_1 = \{0^n \mid n$ é número primo e $n < 1000\}$. Tal conjunto é finito, logo é regular.

   (b) $L_1 \cap L_2 = \{0^n \mid n$ é número primo e $n \geq 1000\}$. Suponha que tal conjunto seja regular. Como as linguagens regulares são fechadas sob união, a linguagem $(L_1 \cap L_2) \cup (L_2 - L_1)$ deve ser regular. Mas $(L_1 \cap L_2) \cup (L_2 - L_1) = L_2$, que não é regular, Portanto, $L_1 \cap L_2$ não é regular.

2. Obtenha expressões regulares que denotem as linguagens:

   (a) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ inicia com 0 e $|w|$ é par$\}$.

   (b) $\{w \in \{0,1\}^* \mid |w| > 0$ e w tem um único 0 nas posições ímpares$\}$. Exemplos, sublinhando o zero na posição ímpar: $\underline{0}$, $\underline{0}0$, $\underline{0}1$, $\underline{0}01$, $\underline{0}11$, $10\underline{0}$, $11\underline{0}$, $\underline{0}010$ etc.

   Solução:

   (a) $0(0+1)((0+1)(0+1))^*$.

   (b) $(1(0+1))^*0((0+1)1)^*(\lambda+0+1)$.

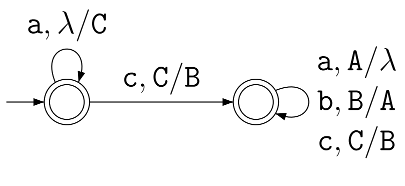
3. Construa:

   (a) Um APD que reconheça $\{\mathtt{a}^n(\mathtt{cba})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

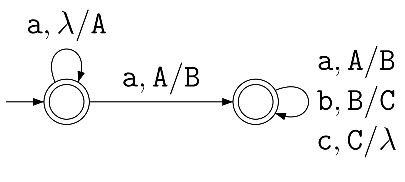
   (b) Um APN que reconheça $\{\mathtt{a}^n(\mathtt{abc})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Solução:

   (a) Um APD para $\{\mathtt{a}^n(\mathtt{cba})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:



   (b) Um APN para $\{\mathtt{a}^n(\mathtt{abc})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:



4. Construa GLCs para as linguagens:

   (a) $\{x\mathtt{b}y \mid x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \text{ e } |x| = |y|\}$.
   (b) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^k\mathtt{c}^n \mid k > m + n\}$.

   Solução:

   (a) GLC para $\{x\mathtt{b}y \mid x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \text{ e } |x| = |y|\}$:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow XPX \mid \mathtt{b} \\ X &\rightarrow \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$

   (b) GLC para $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^k\mathtt{c}^n \mid k > m + n\}$:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow ABC \\ A &\rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \lambda \\ B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b} \\ C &\rightarrow \mathtt{b}C\mathtt{c} \mid \lambda \end{aligned}$$

5. Mostre que a gramática a seguir é ambígua:

   $$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathtt{0}A\mathtt{1} \mid B \\ B &\rightarrow \mathtt{0}B\mathtt{11} \mid C \\ C &\rightarrow \mathtt{0}C\mathtt{111} \mid \lambda \end{aligned}$$

   Solução:

   Duas DMEs para $\mathtt{001111}$:

   $$A \Rightarrow \mathtt{0}A\mathtt{1} \Rightarrow \mathtt{0}B\mathtt{1} \Rightarrow \mathtt{0}C\mathtt{1} \Rightarrow \mathtt{00}C\mathtt{1111} \Rightarrow \mathtt{001111}$$
   $$A \Rightarrow B \Rightarrow \mathtt{0}B\mathtt{11} \Rightarrow \mathtt{00}B\mathtt{1111} \Rightarrow \mathtt{00}C\mathtt{1111} \Rightarrow \mathtt{001111}$$

6. Transforme a GLC a seguir em uma equivalente na forma normal de Chomsky.

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow \mathtt{a}P\mathtt{b} \mid A \\ A &\rightarrow B\mathtt{a}B \mid \mathtt{a}B \\ B &\rightarrow \mathtt{a}B\mathtt{c} \mid \lambda \end{aligned}$$

   Primeiro elimine regras λ, depois unitárias, etc., como preconiza o método visto.

   Solução:

   (a) Como $VA = \{B\}$, ao eliminar regras λ obtém-se:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow \mathtt{a}P\mathtt{b} \mid A \\ A &\rightarrow B\mathtt{a}B \mid \mathtt{a}B \mid B\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \\ B &\rightarrow \mathtt{a}B\mathtt{c} \mid \mathtt{ac} \end{aligned}$$

   (b) Como $enc(P) = \{P, A\}$, $enc(A) = \{A\}$ e $enc(B) = \{B\}$, ao eliminar regras unitárias obtém-se:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow \mathtt{a}P\mathtt{b} \mid B\mathtt{a}B \mid \mathtt{a}B \mid B\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \\ A &\rightarrow B\mathtt{a}B \mid \mathtt{a}B \mid B\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \\ B &\rightarrow \mathtt{a}B\mathtt{c} \mid \mathtt{ac} \end{aligned}$$

   (c) Como A é inútil:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow \mathtt{a}P\mathtt{b} \mid B\mathtt{a}B \mid \mathtt{a}B \mid B\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \\
B &\rightarrow \mathtt{a}B\mathtt{c} \mid \mathtt{ac}
\end{aligned}
$$

(d) Terminais por variáveis em regras com lado direito maior do que um:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow XPY \mid BXB \mid XB \mid BX \mid \mathtt{a} \\
B &\rightarrow XBZ \mid XZ \\
X &\rightarrow \mathtt{a} \\
Y &\rightarrow \mathtt{b} \\
Z &\rightarrow \mathtt{c}
\end{aligned}
$$

(e) Quebrando lado direito maior do que dois:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow XR_1 \mid BR_2 \mid XB \mid BX \mid \mathtt{a} \\
B &\rightarrow XR_3 \mid XZ \\
X &\rightarrow \mathtt{a} \\
Y &\rightarrow \mathtt{b} \\
Z &\rightarrow \mathtt{c} \\
R_1 &\rightarrow PY \\
R_2 &\rightarrow XB \\
R_3 &\rightarrow BZ
\end{aligned}
$$