Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Fundamentos da Teoria da Computação — 1º semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira
Solução da Segunda Lista de Exercícios

Linguagens

1. *Sejam A, B e C linguagens sobre um alfabeto Σ. Mostre que:*

   (a) $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

$$\begin{aligned} x \in A(B \cup C) &\Leftrightarrow x = uv, \text{ onde } u \in A \text{ e } v \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x = uv, \text{ onde } u \in A \text{ e } (v \in B \text{ ou } v \in C) \\ &\Leftrightarrow x = uv, \text{ onde } (u \in A \text{ e } v \in B) \text{ ou } (u \in A \text{ e } v \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (AB) \text{ ou } x \in (AC) \\ &\Leftrightarrow x \in (AB) \cup (AC) \end{aligned}$$

   (b) *não é sempre verdade que* $A(B \cap C) = (AB) \cap (AC)$
   Sejam $A = \{\lambda, a\}$, $B = \{b\}$ e $C = \{ab\}$. Neste caso, $A(B \cap C) = \{a, \lambda\}\phi = \phi$. No entanto, $(AB) \cap (AC) = \{b, ab\}) \cap (\{ab, aab\} = \{ab\}$.

2. *Seja $\Sigma_1 = \{0\}$, e $\Sigma_2 = \{1\}$. Mostre que os seguintes conjuntos são enumeráveis:*

   (a) Σ_1^*
   Uma função bijetiva, $f : \Sigma_1^* \rightarrow \mathbf{N}$, seria $f(0^n) = n$ para $n \in \mathbf{N}$.

   (b) $\Sigma_1^*\Sigma_2^*$
   Uma função bijetiva, $g : \Sigma_1^*\Sigma_2^* \rightarrow \mathbf{N}$, seria $f(0^i1^j) = (\sum_{i=0}^{i+j} i) + j = [(i+j)(i+j+1)/2] + j$ para $i, j \in \mathbf{N}$.

3. *Prove que $(w^R)^i = (w^i)^R$ para todo* string *w e todo $i \geq 0$.*
   Será usada indução sobre i. Inicialmente, observe que $(w^R)^0 = \lambda$, e $(w^0)^R = \lambda^R = \lambda$. Suponha que a proposição seja verdadeira para $i = n$. Deve-se provar então que $(w^R)^{n+1} = (w^{n+1})^R$. Ora,

$$\begin{aligned} (w^R)^{n+1} &= (w^R)^n w^R, \text{ por definição} \\ &= (w^n)^R w^R, \text{ pela hipótese de indução} \\ &= (ww^n)^R, \text{ pois } (uv)^R = v^R u^R \\ &= (w^{n+1})^R, \text{ por definição.} \end{aligned}$$

4. *Quais são os* strings *em $\{\lambda, a\}^n$, para um certo n arbitrário?*
   Os *strings* do conjunto $\{a^i \mid 0 \leq i \leq n\}$.

5. *Prove que sim ou que não: $L^+ = L^* - \{\lambda\}$.*
   Não. Se $\lambda \in L$, $\lambda \in L^+$.

6. *Pode L^* ou L^+ ser ϕ? Sob quais circunstâncias L^* é finito? E L^+?*
   L^* não pode ser ϕ, pois $\lambda \in L^*$ para qualquer L; mas $L^+ = \phi$, no caso em que $L = \phi$. Ambos, L^* e L^+, só são finitos quando $L = \phi$ (neste caso, $L^* = \{\lambda\}$ e $L^+ = \phi$) ou $L = \{\lambda\}$ (neste caso, $L^* = L^+ = \{\lambda\}$).

7. *Dê expressões regulares que denotem os seguintes conjuntos:*

   (a) *o conjunto dos* strings *sobre* $\{a,b,c\}$ *que não contêm* aa.
   $(\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c} \cup \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c}))^*(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{\lambda})$

   (b) *o conjunto dos* strings *sobre* $\{a,b,c\}$ *nos quais cada* b *é seguido por pelo menos um* c.
   $(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{c} \cup \boldsymbol{bc})^*$

   (c) *o conjunto dos* strings *sobre* $\{a,b\}$ *nos quais o número de* a*'s é divisível por 3.*
   $(\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a})^*\boldsymbol{b}^*$

   (d) *o conjunto dos* strings *sobre* $\{a,b\}$ *nos quais cada* a *é precedido (imediatamente) ou seguido (imediatamente) por* b.
   $(\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{ba} \cup \boldsymbol{ab} \cup \boldsymbol{aba})^*$

   (e) *o conjunto dos* strings *sobre* $\{a,b\}$ *com número par de* a*'s e número par de* b*'s.*
   $(\boldsymbol{aa} \cup \boldsymbol{bb} \cup (\boldsymbol{ab} \cup \boldsymbol{ba})(\boldsymbol{aa} \cup \boldsymbol{bb})^*(\boldsymbol{ab} \cup \boldsymbol{ba}))^*$

   (f) *o conjunto dos* strings *de tamanho ímpar sobre* $\{a,b\}$ *que contêm exatamente dois* b*'s.*
   $(\mathsf{p}\boldsymbol{b}\mathsf{p}\boldsymbol{b}\mathsf{i}) \cup (\mathsf{p}\boldsymbol{b}\mathsf{i}\boldsymbol{b}\mathsf{p}) \cup (\mathsf{i}\boldsymbol{b}\mathsf{p}\boldsymbol{b}\mathsf{p}) \cup (\mathsf{i}\boldsymbol{b}\mathsf{i}\boldsymbol{b}\mathsf{i})$
   onde $\mathsf{p} = (\boldsymbol{aa})^*$ e $\mathsf{i} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{aa})^*$.

8. *Construa expressões regulares que denotem os conjuntos:*

   (a) $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ *tem pelo menos um* a*, e o primeiro* a *não é precedido de nenhum* $b\}$
   $\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c})^*$

   (b) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ *tem ambos,* aa *e* bb*, como* substrings$\}$
   $(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*(\boldsymbol{aa}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*\boldsymbol{bb} \cup \boldsymbol{bb}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*\boldsymbol{aa})(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*$

   (c) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ *não contém os substrings* aa *nem* $bb\}$
   $(\boldsymbol{ab})^*(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{\lambda}) \cup (\boldsymbol{ba})^*(\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{\lambda})$

9. *Descreva, em português, os conjuntos denotados pelas seguintes expressões regulares:*

   (a) $(\mathbf{11} \cup \mathbf{0})^*(\mathbf{00} \cup \mathbf{1})^*$
   Definamos: *Substring maximal de 1's: substring de 1's que (a) é prefixo ou é delimitado à esquerda por 0, e (b) é sufixo ou é delimitado à direita por 0. Substring maximal de 0's:* análogo, trocando 1 por 0, e vice-versa. Então: conjunto dos strings sobre $\{0,1\}$ em que após o primeiro *substring maximal de 1's* de tamanho ímpar, se houver, os *substrings maximais de 0's* , se houver algum, são de tamanho par.

   (b) $(\mathbf{1} \cup \mathbf{01} \cup \mathbf{001})^*(\boldsymbol{\lambda} \cup \mathbf{0} \cup \mathbf{00})$
   Conjunto dos *strings* sobre $\{0,1\}$ em que não existem mais de dois 0's consecutivos.

   (c) $[\mathbf{00} \cup \mathbf{11} \cup (\mathbf{01} \cup \mathbf{10})(\mathbf{00} \cup \mathbf{11})^*(\mathbf{01} \cup \mathbf{10})]^*$
   Conjunto dos *strings* sobre $\{0,1\}$ com número par de 0's e número par de 1's.

10. *Simplifique as seguintes expressões regulares:*

   (a) $\boldsymbol{\phi}^* \cup \boldsymbol{a}^* \cup \boldsymbol{b}^* \cup (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}^* \cup \boldsymbol{a}^* \cup \boldsymbol{b}^* \cup (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^* &= \boldsymbol{\phi}^* \cup \boldsymbol{a}^* \cup (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^* \\
&= \boldsymbol{\phi}^* \cup (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^* \\
&= \boldsymbol{\lambda} \cup (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^* \\
&= (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*
\end{aligned}$$

(b) $(\boldsymbol{aa})^*\boldsymbol{a} \cup (\boldsymbol{aa})^*$

$$(\boldsymbol{aa})^*\boldsymbol{a} \cup (\boldsymbol{aa})^* \quad = \quad \boldsymbol{a}^*$$

(c) $(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*$

$$(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^* \quad = \quad \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})^*$$

(d) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{aa})^*\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{\lambda}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{aa})^*\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{aa})^*\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{\lambda} \\ &= (\boldsymbol{aa})^+ \cup \boldsymbol{\lambda} \\ &= (\boldsymbol{aa})^* \end{aligned}$$

(e) $(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{aa})^*(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{aa}) \cup \boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{aa})^*(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{aa}) \cup \boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})(\boldsymbol{aa})^*(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{aa}) \cup \boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} \\ &= (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})(\boldsymbol{aa})^* \cup \boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} \\ &= (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b})(\boldsymbol{aa})^* \end{aligned}$$