Linguagens Formais e Autômatos

Newton José Vieira
Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais

Conteúdo:

Conceitos Preliminares:

1. Representação
2. Prova de Teoremas
3. Conjuntos
4. Relações
5. Funções
6. Conjuntos Enumeráveis
7. Definições Recursivas
8. Indução Matemática
9. Grafos

Conceitos Preliminares (continuação):

10. Linguagens Formais

11. Gramáticas

12. Problemas de Decisão

Representação:

Entidade	*Modelo matemático*	*Representação*
mês	número inteiro no intervalo $[1, 12]$	um dos caracteres 0 a 9, A ou B
remuneração	número real positivo	base 10
presença	vetor de números, um para cada dia do mês	seqüência de reais na base 10
FP	relação	"arquivo"
cálculo de FP	algoritmo	programa

Sequência de símbolos: elemento fundamental das **linguagens formais**.

Prova de Teoremas:

- Estilo:
  - formal $\times$ informal;
  - conciso $\times$ prolixo.

- Prova:
  - <u>vocabulário limitado</u>;
  - usa <u>técnicas de prova</u>.

Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Tabelas da verdade:

Negação	
α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Conjunção		
α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção		
α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional		
α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional		
α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Quantificação universal: $\forall x P(x)$

P(x) é verdadeira
para todo x do universo.

Quantificação existencial: $\exists x P(x)$

P(x) é verdadeira
para algum x do universo.

Exemplo:

Expressar formalmente:
todo número natural par ao quadrado é par.

Exemplos de afirmativas **válidas**:

$$\alpha \vee \neg\alpha$$
$$\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$$
$$\forall x P(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg P(x)$$

Exemplos de afirmativas **contraditórias**:

$$\alpha \wedge \neg\alpha$$
$$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \wedge \neg\beta$$
$$\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$$

Exemplos de **equivalências lógicas**:

$$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$$
$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$
$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

Mais exemplos de **equivalências lógicas**:

$$\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$$
$$\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$$
$$\alpha \to (\beta \to \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$$
$$\neg(\alpha \to \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$
$$\forall x P(x) \equiv \neg\exists x \neg P(x)$$
$$\exists x P(x) \equiv \neg\forall x \neg P(x)$$
$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$
$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Exemplo de **consequência lógica**:

$$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \Rightarrow \beta$$

Exemplos de **regras de inferência**:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \\ \alpha \to \beta\end{array}}{\beta} \qquad \frac{\begin{array}{l}\alpha \\ \neg\alpha \lor \beta\end{array}}{\beta} \qquad \frac{\begin{array}{l}\neg\beta \\ \alpha \to \beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \to \beta \\ \neg\alpha \to \beta\end{array}}{\beta} \qquad \frac{\begin{array}{l}\alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma\end{array}}{\alpha \to \gamma} \qquad \frac{\begin{array}{l}\alpha \leftrightarrow \beta \\ \beta \leftrightarrow \gamma\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \gamma}$$

Relação entre $\to$ e $\Rightarrow$:

se $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta$, então $\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta$.

Técnicas de prova:

- Prova direta.

  Ex: n é par $\rightarrow n^2$ é par.

- Prova pela contrapositiva.

  Ex: n^2 é par $\rightarrow n$ é par.

- Prova para universal.

  Ex: $\forall n \in \mathbf{N}$ (n é par $\rightarrow n^2$ é par).

- Prova por contradição.

  Ex: existe uma infinidade de primos.

Mais técnicas de prova:

- Prova por construção.

  Ex: $\forall n \in \mathbf{N} \exists k \in \mathbf{N}\ k$ tem n divisores distintos.

- Prova por análise de casos.

  Ex:
  $\forall x, y \in \mathbf{R}\ \mathit{min}(x, y) + \mathit{max}(x, y) = x + y$.

- Prova para bicondicional.

  Ex: $\forall n \in \mathbf{N}\ (n$ par $\leftrightarrow n^2$ par$)$.

Conjuntos:

O **conjunto vazio**: $\emptyset$.

Conjunto **unitário** , **finito**, **infinito**.

Números **naturais**, **inteiros**, **reais**, **racionais**: **N**, **Z**, **R**, **Q**.

Notação importante:

$$\{x \mid P(x)\}$$

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

Suconjunto: $A \subseteq B$.

Suconjunto próprio: $A \subset B$.

União: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Interseção: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Diferença: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Complemento: $\overline{A} = U - A$.

Exemplos de identidades:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Igualdade: $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$.

Ex: prove que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Conjuntos **disjuntos**: $A \cap B = \emptyset$.

União de n conjuntos:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Interseção de n conjuntos:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Partição de um conjunto A.

O **conjunto potência**: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Número de elementos de A: $|A|$.
Exs: $|\emptyset| = 0$, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Par não ordenado: (a, b) ou $[a, b]$. Tripla, quádrupla, etc.

Produto cartesiano:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Produto cartesiano de n conjuntos: A^n.

Relações:

Relação de n argumentos sobre A_1, ..., A_n:

Subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Relação **binária**: $R \subseteq A \times B$

Domínio: A.

Contra-domínio: B.

Imagem: $\{y \,|\, (x, y) \in R$ para algum $x\}$.

Notação: $(x, y) \in R$ é o mesmo que xRy.

Relação **inversa**: $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$.

Exemplo: Seja $<$ sobre $\mathbf{N}^2$. Dê:
domínio, contra-domínio, imagem, inversa.

Propriedades de uma relação binária R:

Reflexiva: $\forall x\, xRx$

Simétrica: $\forall x, y\, xRy \rightarrow yRx$.

Transitiva: $\forall x, y, z\, (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$.

Relação de **equivalência**:

reflexiva, simétrica e transitiva.

induz **classes de equivalência**.

Exs. de relações de equivalência:

(*mod* n)

fazem aniversário no mesmo dia.

O **Fecho reflexivo** de $R \subseteq A \times A$ é S tal que:

- $R \subseteq S$;
- S é reflexiva;
- se $R \subseteq T$ e T é reflexiva, $S \subseteq T$.

Fechos **simétrico** e **transitivo**: análogos.

Funções:

Função (parcial) $f : A \to B$:
é uma relação $f \subseteq A \times B$ tal que:

se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

$(x, y) \in f$ é o mesmo que $f(x) = y$.

f é **indefinida** para x se não há y tal que $f(x) = y$.

Função **total**: definida para todo argumento.

Função $f : A \to B$ de n argumentos:
$A = A_1 \times \ldots \times A_n$.

Composição: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

A função total $f : A \rightarrow B$ é:

- **Injetora**: se $\forall x, y\, x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$.
  Ex: $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $f(n) = 2n$.

- **Sobrejetora**: se B é a imagem de f.
  Ex: $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $g(n) = |n|$.

- **Bijetora**: se é injetora e sobrejetora.
  Ex: $h : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $h(n) = 2n$ se $n \geq 0$, e $h(n) = -(2n + 1)$ se $n < 0$.

Conjuntos Enumeráveis:

Conjuntos de mesma **cardinalidade**:
existe uma função bijetora de um para o outro.

Conjunto **infinito** A:
tem subconjunto próprio de mesma cardinalidade.

Conjunto **enumerável** A: *card* $(A) =$ *card* $(\mathbf{N})$.

Conjunto **contável**: finito ou enumerável.

Ex: **Z** é enumerável:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \end{array}$$

Afirmativas equivalentes:

1. A é contável.

2. Existe função bijetora de A para **N**.

3. $A = \emptyset$ ou existe função sobrejetora de **N** para A.

Ex: QP (racionais positivos) é enumerável:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \\
1 & 2 & 4 & 7 & 11 & & \\
2 & 5 & 8 & 12 & & & \\
3 & 9 & 13 & & & & \\
4 & 14 & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Para provar que um conjunto não é enumerável:
diagonalização de Cantor.

Exs. de conjuntos infinitos não enumeráveis:

- $\mathcal{P}(\mathbf{N})$

	0	1	2	3	$\cdots$
C_0	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
C_1	$\in$ ou $\notin$	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
C_2	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	$\in$ ou $\notin$	
C_3	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\boxed{\in \text{ ou } \notin}$	
$\vdots$					

- Conjunto das funções $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

	0	1	2	3	$\cdots$
f_0	$\boxed{f_0(0)}$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	
f_1	$f_1(0)$	$\boxed{f_1(1)}$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$\boxed{f_2(2)}$	$f_2(3)$	
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$\boxed{f_3(3)}$	
$\vdots$					

Definições Recursivas:

Def. recursiva do <u>conjunto A</u>:

(a) **Base**: especificação de $B \subset A$.

(b) **Passo recursivo**: como obter elementos de A a partir de elementos de A.

(c) **Fechamento**.

Exemplos:

N.

fat : **N** $\rightarrow$ **N**.

$+ \subseteq$ **N**^{2}.

A linguagem LP: p, q, ... e conectivos proposicionais.

Indução Matemática:

Indução **fraca**:

Se

1. $P(0)$, e

2. $\forall n (P(n) \to P(n+1))$,

então $\forall n P(n)$.

Exemplos:

- $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$.

- $n! > 2^n$ para todo $n \geq 4$.

Indução **forte**:

Se

$$\forall n \, [\forall k < n P(k)] \to P(n),$$

então $\forall n P(n)$.

Exemplos:

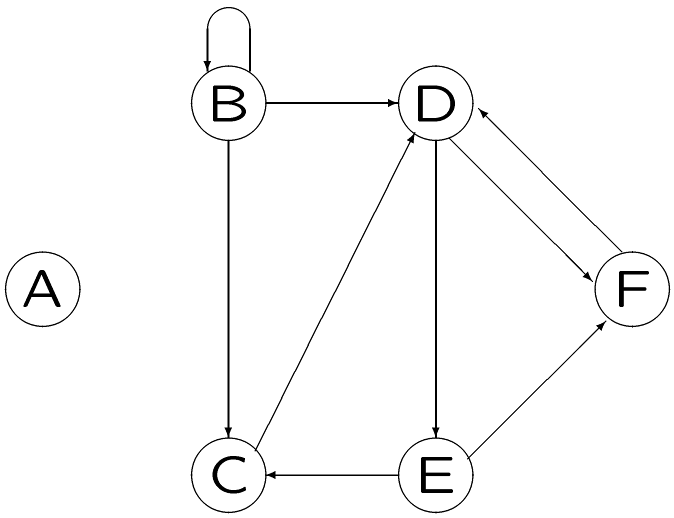
- todo $n \geq 2$ é primo ou produto de primos.

- $\mathsf{na}(\alpha) = \mathsf{na}(\beta)$ para toda $\alpha \in \mathsf{LP}$.

Grafos:

Grafo: constituído de **vértices** e **arestas**.

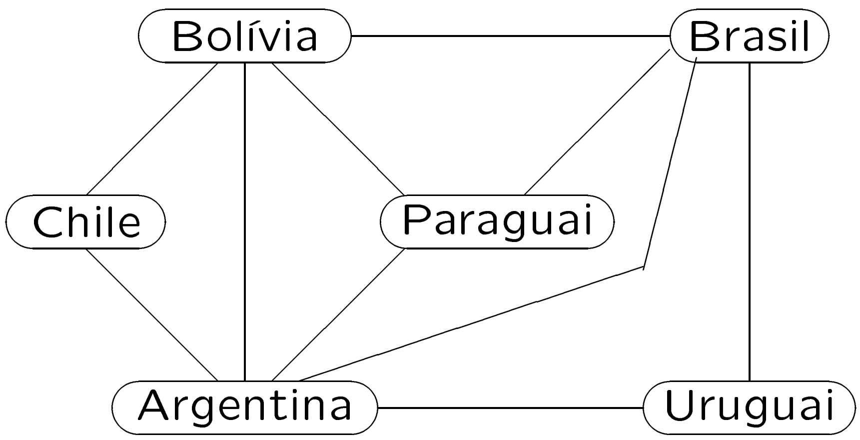
Grafo **dirigido**:



- Vértices: $\{A, B, C, D, E, F\}$.

- Arestas: $\{(B, B), (B, C), (B, D), (D, E), \ldots\}$.

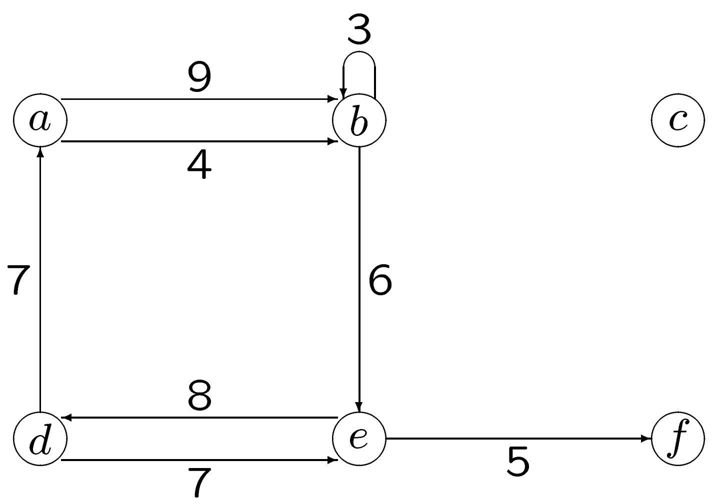
Grafo **não dirigido**:



- Vértices: {Brasil, Bolívia, ...}.

- Arestas: {{Bolívia, Chile}, {Bolívia, Brasil}, ...}.

Grafo dirigido **rotulado**:



- Vértices: $\{a, b, c, d, e, f\}$.

- Arestas: $\{(a, 4, b), (a, 9, b), (b, 3, b), \ldots\}$.

Grau de um vértice (de entrada, de saída).

Caminho de **tamanho** n de a para b.

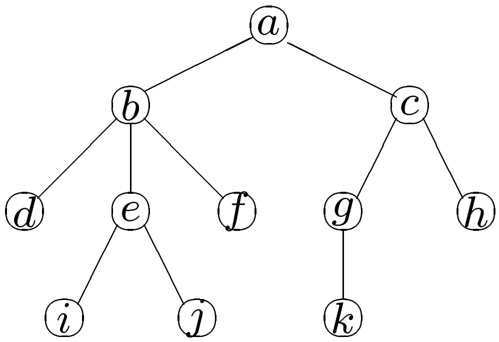
Caminho **nulo**; **fechado**; **ciclo**; **laço**.

Caminho **simples**: sem vértices repetidos.

Grafo **acíclico**.

Grafo **conexo**.

Árvore:



Definição recursiva de árvore:

(a) $(\{v\}, \emptyset, v)$ é árvore, para qualquer v;

(b) se (V, A, r) é uma árvore, $v \in V$ e $v' \notin V$ então $(V \cup \{v'\}, A \cup \{\{v, v'\}\}, r)$ é árvore.

Terminologia associada a árvores:

- Descendente, ancestral; filhos, pais, irmãos.
- Vértice **interno**, **folha**.
- **Nível** de um vértice; **altura** da árvore.
- Árvore **dirigida**; **ordenada**.
- **Fronteira** de uma árvore.