

O lema do bombeamento para LLCs

Lema do bombeamento

Seja L uma LLC. Então existe $k > 0$ tal que para qualquer $z \in L$ com $|z| \geq k$ existem u, v, w, x e y tais que:

- $z = uvwxy$;
- $|vwx| \leq k$;
- $vx \neq \lambda$; e
- $uv^iwx^iy \in L$ para todo $i \geq 0$.

Exemplo de uso do lema do bombeamento

Seja $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Suponha que L seja uma LLC. Seja k a constante do LB e $z = a^k b^k c^k$. Como $|z| > k$, sejam u, v, w, x e y tais que $z = uvwxy$, $|vwx| \leq k$, e $vx \neq \lambda$. Considera-se dois casos:

- vx contém algum a . Como $|vwx| \leq k$, vx não contém cs. Portanto, uv^2wx^2y contém mais a s que cs. Assim, $uv^2wx^2y \notin L$.
- vx não contém a . Como $vx \neq \lambda$, uv^2wx^2y contém menos a s que b s e/ou c s. Dessa forma, $uv^2wx^2y \notin L$.

Logo, em qualquer caso $uv^2wx^2y \notin L$, contrariando o LB. Portanto, L não é LLC.

Exemplo de uso do lema do bombeamento

Seja $L = \{0^n \mid n \text{ é primo}\}$.

Suponha que L seja uma LLC. Seja k a constante do LB, e seja $z = 0^n$, em que n é um número primo maior que k . Como $|z| > k$, para provar que L não é livre do contexto, basta então supor que $z = uvwxy$, $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, e encontrar um i tal que $uv^iwx^iy \notin L$, contrariando o LB. Pelas informações anteriores, tem-se que $uv^iwx^iy = 0^{n+(i-1)|vx|}$ (pois $z = 0^n$). Assim, i deve ser tal que $n + (i-1)|vx|$ não seja um número primo. Ora, para isso, basta fazer $i = n + 1$, obtendo-se $n + (i-1)|vx| = n + n|vx| = n(1 + |vx|)$, que não é primo (pois $|vx| > 0$). Desse modo, $uv^{n+1}wx^{n+1}y \notin L$, contradizendo o LB. Logo, L não é LLC.

Algumas propriedades de fechamento

A classe das LLCs é fechada sob:

- união,
- concatenação,
- fecho de Kleene.

Demonstração: trivial, usando GLCs.

Não fechamento

A classe das LLCs não é fechada sob:

- Interseção.

$L_1 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^k c^k \mid n, k \geq 0\}$ são LLCs.

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ não é LLC.

- Complementação.

$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

Um teorema importante

Seja L uma LLC e R uma linguagem regular. Então $L \cap R$ é uma LLC.

Seja $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ tem o mesmo número de as, bs e cs}\}$.

Suponha que L seja uma LLC. Então, como $R = L(a^* b^* c^*)$ é uma linguagem regular, $L \cap R$ é LLC. Mas, $L \cap R = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbf{N}\}$, que não é LLC. Logo, L não é LLC.

Problemas decidíveis e indecidíveis

Problemas decidíveis:

- Determinar se $w \in L(G)$, para qualquer GLC G e palavra w .
- Determinar se $L(G)$ é vazia, para qualquer GLC G .

Problemas indecidíveis:

- Determinar se G é ambígua, para qualquer GLC G .
- Determinar se $L(G) = \Sigma^*$, para qualquer GLC G .
- Verificar se $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$, para quaisquer GLCs G_1 e G_2 .
- Determinar se $L(G_1) \subseteq L(G_2)$, para quaisquer GLCs G_1 e G_2 .
- Determinar se $L(G_1) = L(G_2)$, para quaisquer GLCs G_1 e G_2 .