Capítulo 7: Lógica de Primeira Ordem (LPO)

Elementos básicos

Alfabeto:

- Constante: designa um objeto do domínio. Exemplos: 2, UFMG, Pelé.
- Símbolo funcional: designa uma função. Exemplos: +, raiz, mãe.
- Símbolo predicativo: designa uma relação. Exemplos: $\geq$, irmãos, cor.
- Variável (para quantificação): x, y, z, a, b, ...
- Conectivo: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
- Igualdade: $=$
- Quantificador: $\forall$, $\exists$.

Termo:

- Toda constante e toda variável é um termo.
- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e f é uma função de n argumentos, $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo.

Exemplos de termos:

- x
- UFMG
- reitor(UFMG)
- mãe(x)
- mãe(reitor(UFMG))

Fórmula atômica:

- Se t_1, t_2, $\ldots$, t_n são termos e P é um predicado de n argumentos, $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica.
- Se t_1 e t_2 são termos, $t_1 = t_2$ é uma fórmula atômica.

Exemplos de fórmulas atômicas:

- irmãos(Abel, Caim)
- estuda(mãe(reitor(UFMG)), UFMG)
- estuda(x, UFMG)
- mãe(Abel) $=$ mãe(Caim)
- $>$ (tam(mãe(reitor(UFMG))), 1.70)

Sentenças complexas:
(esta parte é idêntica à de Lógica Proposicional)

- Se S é uma sentença, $\neg S$ é sentença.
- Se S é uma sentença, (S) é sentença.
- Se S_1 e S_2 são sentenças, então são sentenças:

$$S_1 \wedge S_2$$
$$S_1 \vee S_2$$
$$S_1 \Rightarrow S_2$$
$$S_1 \Leftrightarrow S_2$$

Alguns exemplos:

- $+(2,2) = 4 \wedge \text{raiz}(4,2)$
- $\text{ama}(\text{mãe}(x), x) \vee \neg\text{vivo}(x) \vee \neg\text{vivo}(\text{mãe}(x))$
- $(\text{vivo}(x) \wedge \text{vivo}(\text{mãe}(x))) \Rightarrow \text{ama}(\text{mãe}(x), x)$
- $\text{irmãos}(\text{Abel}, \text{Caim}) \Rightarrow \text{irmãos}(\text{Caim}, \text{Abel})$

Verdade em LPO

Uma **interpretação** para sentenças especifica:

- Para cada **constante** um *objeto*.
- Para cada **símbolo funcional** uma *função*.
- Para cada **símbolo predicativo** uma *relação*.

Interpretando sentenças atômicas:

Sentença	Interpretação
$+(2,2) = 4$	$2 + 2$ e 4 referem-se ao mesmo objeto
mãe(Eva, Abel)	$(Eva, Abel) \in$ *mãe-de*

Os conectivos são interpretados como em Lógica Proposicional.

Quantificador universal

- Se S é uma sentença, $\forall x, y, \ldots S$ é sentença.

Alguns exemplos:

- $\forall x(\text{homem}(x) \Rightarrow \text{mortal}(x))$
- $\forall x[(\text{vivo}(x) \wedge \text{vivo}(\text{mãe}(x))) \Rightarrow \text{ama}(\text{mãe}(x), x)]$
- $\forall x, y(\text{irmãos}(x, y) \Rightarrow \text{irmãos}(y, x))$

Significado da quantificação universal:

- $\forall x S$ equivale à *conjunção* de *instanciações* de S.

Exemplo: $\forall x(\text{homem}(x) \Rightarrow \text{mortal}(x))$
significa o mesmo que:

$$
\begin{aligned}
&(\text{homem}(\text{Sócrates}) \Rightarrow \text{mortal}(\text{Sócrates}))\\
\wedge&(\text{homem}(\text{Platão}) \Rightarrow \text{mortal}(\text{Platão}))\\
\wedge&(\text{homem}(\text{Zeno}) \Rightarrow \text{mortal}(\text{Zeno}))\\
\wedge&\cdots
\end{aligned}
$$

Quantificador existencial

- Se S é uma sentença, $\exists x, y, \ldots S$ é sentença.

Alguns exemplos:

- $\exists x(\text{animal}(x) \wedge \text{racional}(x))$
- $\exists x[\text{gosta}(x, \text{Maria}) \wedge \neg\text{gosta}(x, \text{mãe}(\text{Maria}))]$
- $\exists x, y(\text{irmãos}(x, y) \wedge \text{gosta}(x, y))$

Significado da quantificação existencial:

- $\exists x S$ equivale à *disjunção* de *instanciações* de S.

Exemplo: $\exists x(\text{animal}(x) \wedge \text{racional}(x))$
significa o mesmo que:

$$
\begin{aligned}
&(\text{animal}(\text{Sócrates}) \wedge \text{racional}(\text{Sócrates}))\\
\vee&(\text{animal}(\text{Platão}) \wedge \text{racional}(\text{Platão}))\\
\vee&(\text{animal}(\text{Zeno}) \wedge \text{racional}(\text{Zeno}))\\
\vee&\cdots
\end{aligned}
$$

Tipicamente, quando se usa $\forall$ o conectivo principal é $\Rightarrow$:

- *Todo cão é mamífero*:

  $$\forall x(\text{cão}(x) \Rightarrow \text{mamífero}(x))$$

- *O homem é um animal racional*:

  $$\forall x[\text{homem}(x) \Rightarrow (\text{animal}(x) \wedge \text{racional}(x))]$$

- *Os irmãos de Pedro moram em Belo Horizonte*:

  $$\forall x(\text{irmãos}(\text{Pedro}, x) \Rightarrow \text{mora}(x, \text{BH}))$$

Tipicamente, quando se usa $\exists$ o conectivo principal é $\wedge$:

- *Existem homens irracionais*:

  $$\exists x(\text{homem}(x) \wedge \neg\text{racional}(x))$$

- *Alguns alunos gostam de Lógica*:

  $$\exists x[\text{aluno}(x) \wedge \text{gosta}(x, \text{Lógica})]$$

- *Alguém temido por todos detesta Lógica*:

  $$\exists x(\forall y\, \text{teme}(y, x) \wedge \text{odeia}(x, \text{Lógica}))$$

Propriedades dos quantificadores

- $\forall x \forall y S \equiv \forall y \forall x S$
- $\exists x \exists y S \equiv \exists y \exists x S$
- $\exists x \forall y S \not\equiv \forall y \exists x S$

  $\exists x \forall y\, \mathrm{ama}(x, y)$
  (*Alguém ama todo mundo.*)
  $\forall y \exists x\, \mathrm{ama}(x, y)$
  (*Todo mundo é amado por alguém.*)

Leis de De Morgan para sentenças quantificadas e não quantificadas:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\neg \forall x S & \equiv & \exists x \neg S & \neg(S_1 \wedge S_2) & \equiv & \neg S_1 \vee \neg S_2 \\
\neg \exists x S & \equiv & \forall x \neg S & \neg(S_1 \vee S_2) & \equiv & \neg S_1 \wedge \neg S_2 \\
\forall x S & \equiv & \neg \exists x \neg S & S_1 \wedge S_2 & \equiv & \neg(\neg S_1 \vee \neg S_2) \\
\exists x S & \equiv & \neg \forall x \neg S & S_1 \vee S_2 & \equiv & \neg(\neg S_1 \wedge \neg S_2)
\end{array}
$$

Igualdade

$t_1 = t_2$ é verdadeiro sob uma interpretação
se, e somente se
t_1 e t_2 referem-se ao mesmo objeto.

Exemplos:

- $1 = 2$ é satisfatível.
- $\forall x \times(\text{raiz}(x), \text{raiz}(x)) = x$ é satisfatível.

Exemplos de uso da igualdade:

- Ana ama uma única pessoa:

$$\exists x[\text{ama}(\text{Ana}, x) \land \forall y(\text{ama}(\text{Ana}, y) \Rightarrow x = y)]$$

- José ama no mínimo 2 pessoas:

$$\exists x, y[\text{ama}(\text{José}, x) \land \text{ama}(\text{José}, y) \land \neg(x = y)]$$

- Definição da relação “irmãos”:

$$\begin{aligned}&\forall x, y\{\text{irmãos}(x, y) \Leftrightarrow \neg(x = y) \land \\ &\quad \exists m, p[\neg(m = p) \land \text{pai}(p, x) \land \text{mãe}(m, x) \land \\ &\qquad \text{pai}(p, y) \land \text{mãe}(m, y)]\}\end{aligned}$$

Interagindo com uma BC

Introduzindo sentenças:

TELL(BC, $\forall x, y[\text{mãe}(x) = y \Leftrightarrow \text{fem}(x) \wedge \text{filh}(y, x)]$)

TELL(BC, fem(Ana)$\wedge$filh(Leo, Ana)$\wedge$filh(Sue, Leo))

...

Consultando a BC:

ASK(BC, avó(Ana, Sue))

Resp: *sim.*

ASK(BC, avó(Ana, x))

Resp: *sim*, x/Sue $\leftarrow$ **substituição**

...

$S\sigma$: resultado de aplicar a substituição σ na sentença S. Exemplo:

- Sendo $S = \text{irmãos}(x, y)$ e $\sigma = \{x/\text{Abel}, y/\text{Caim}\}$:
  $S\sigma = \text{irmãos}(\text{Abel}, \text{Caim})$

ASK(BC, S) retorna σ tal que $S\sigma$ (algum, todos?).

Agentes lógicos para o mundo do Wumpu

Um agente Baseado em Conhecimento genérico:

Figura 7.2

MAKE-PERCEPT-SENTENCE$(\text{percept}, 5)$ produz:

- $\text{est}([\text{cheiro}, \text{brisa}, \text{brilho}, -, -], 5)$

Ações possíveis para o agente:

- *vire(esq), vire(dir), anda, pega, larga, atira, sai.*

MAKE-ACTION-QUERY(5) produz:

- $\text{ação}(a, 5)$

ASK retorna substituição do tipo $\{a/atira\}$

Agente do tipo reflexo

Percepção:

- $\forall v, b, z, g, t\,[\text{est}([\text{cheiro}, v, b, z, g], t) \Rightarrow \text{cheirou}(t)]$
- $\forall c, b, z, g, t\,[\text{est}([c, \text{brisa}, b, z, g], t) \Rightarrow \text{brisa}(t)]$
- $\forall c, v, z, g, t\,[\text{est}([c, v, \text{brilho}, z, g], t) \Rightarrow \text{no-ouro}(t)]$

Indicando a ação (reflexo):

- $\forall t\,[\text{no-ouro}(t) \Rightarrow \text{ação}(\textit{pega}, t)]$

Problema:

- **Agente não tem memória (estado) interna.**
- Exemplo: como saber se já está com o ouro?

  $\forall t[\text{no-ouro}(t) \wedge \neg\text{com}(\text{ouro}, t) \Rightarrow \text{ação}(\textit{pega}, t)]$

  $\text{com}(\text{ouro}, t)$ não pode ser <u>observado</u> pelo agente!

  $\Rightarrow$ Necessário anotar *mudanças* no mundo.

- Outro exemplo: agente não sabe em qual local está; como saber quando sair?

Anotando mudanças no mundo

Cálculo das situações:

Um argumento em cada predicado representa a *situação* em que ele se aplica, a menos que ele se aplique a toda situação.

Exemplo: ao invés de local(Agente, $[i, j]$), diz-se:

- local(Agente, $[1, 1]$, S_0) $\wedge$ local(Agente, $[1, 2]$, S_1), $\ldots$

Res($anda, S_0$) $= S_1$
Res($vira(dir), S_1$) $= S_2$
Res($anda, S_2$) $= S_3$

Figura 7.3

Cálculo das situações/Axiomas:

Axiomas de <u>efeito</u>: o que **muda** após ação

Exemplos:

- $\forall s[\text{no-ouro}(s) \Rightarrow \text{com}(\text{ouro}, \text{Res}(\textit{pega}, s))]$
- $\forall s, x\, \neg\text{com}(x, \text{Res}(\textit{larga}, s))$

<u>*Frame*</u> *axioms:* o que **não muda** após ação

Exemplos:

- $\forall s[\text{tem-flexa}(s) \Rightarrow \text{tem-flexa}(\text{Res}(\textit{pega}, s))]$
- $\forall s\, \text{tem-flexa}(\text{Res}(\textit{larga}, s))]$
- $\forall a, x, s[\text{com}(x, s) \wedge (a \neq \textit{larga}) \Rightarrow \text{com}(x, \text{Res}(a, s))]$
- $\forall a, x, s[\neg\text{com}(x, s) \wedge (a \neq \textit{pega} \vee \neg\text{presente}(x, s)) \Rightarrow \neg\text{com}(x, \text{Res}(a, s))]$

Frame problem: como lidar com a "não mudança"?

(a) *Representação:* evitar *frame axioms*.

(a) *Inferência:* evitar re-inferir fatos que não mudam.

Resolvendo o *frame problem* representacional: <u>axiomas de estado-sucessor</u>

⇒ Um axioma mostrando todas as formas do predicado ficar verdadeiro <u>no próximo estado</u> e todas as formas dele ficar falso:

$$
\begin{array}{lll}
P \text{ verdadeiro após} & \Leftrightarrow & \text{ação faz } P \text{ verdadeiro} \\
& & \vee\ P \text{ já verdadeiro} \\
& & \text{e nenhuma ação o faz falso}
\end{array}
$$

Exemplo:

$\forall a, x, s\, \text{com}(x, \text{Res}(a, s)) \Leftrightarrow [(a = \textit{pega} \wedge \text{presente}(x, s)) \vee (\text{com}(x, s) \wedge a \neq \textit{larga})]$

⇒ Um axioma para cada predicado que pode se modificar no tempo.

Lidando com a localização

- Local inicial: $\text{local}(\text{Agente}, [1,1], S_0)$.
- Direção: $\text{Orient}(\text{Agente}, S_0) = 0$.
- Local em frente dada uma direção (em graus):

$$\forall x, y\, \text{loc-f}([x,y], 0) = [x+1, y]$$
$$\forall x, y\, \text{loc-f}([x,y], 90) = [x, y+1]$$
$$\forall x, y\, \text{loc-f}([x,y], 180) = [x-1, y]$$
$$\forall x, y\, \text{loc-f}([x,y], 270) = [x, y-1]$$

Local em frente do agente p que está em l:

$$\forall p, l, s\, \text{local}(p, l, s) \Rightarrow$$
$$\text{loc-a-f}(p, s) = \text{loc-f}(l, \text{Orient}(p, s))$$

Adjacência:

$$\forall l_1, l_2\, \text{adj}(l_1, l_2) \Leftrightarrow \exists d\, l_1 = \text{loc-f}(l_2, d)$$

- Detalhes geográficos do mapa:

$$\forall x, y\, \text{parede}([x,y]) \Leftrightarrow$$
$$(x = 0 \vee x = 5 \vee y = 0 \vee y = 5)$$

- Influência das ações: apenas *anda* influencia.

$$\forall a, l, p, s\, \mathrm{local}(p, l, \mathrm{Res}(a, s)) \Leftrightarrow$$
$$(a = anda \wedge l = \text{loc-a-f}(p, s) \wedge \neg \mathrm{parede}(l))$$
$$\vee (\mathrm{local}(p, l, s) \wedge a \neq anda)$$

- Influência das ações na direção:

$$\forall a, d, p, s\, \mathrm{Orient}(p, \mathrm{Res}(a, s)) = d \Leftrightarrow$$
$$(a = vira(dir) \wedge d = mod(\mathrm{Orient}(p, s) - 90, 360))$$
$$\vee (a = vira(esq) \wedge d = mod(\mathrm{Orient}(p, s) + 90, 360))$$
$$\vee (\mathrm{Orient}(p, s) = d \wedge \neg (a = vira(dir) \vee a = vira(esq)))$$

Deduzindo propriedades "ocultas"

Propriedades dos locais:

1. $\forall l, s[\text{local}(\text{Agente}, l, s) \wedge \text{brisa}(s) \Rightarrow \text{ventando}(l)]$
2. $\forall l, s[\text{local}(\text{Agente}, l, s) \wedge \text{cheiro}(s) \Rightarrow \text{cheirando}(l)]$

$\Rightarrow$ "Está ventando perto dos buracos":

Regra de **diagnóstico**: infere causa a partir do efeito

1. $\forall l[\text{ventando}(l) \Rightarrow \exists l_1 \text{buraco}(l_1) \wedge \text{adj}(l, l_1)]$

Regra **causal**: infere efeito a partir da causa

1. $\forall l, l_1[\text{buraco}(l) \wedge \text{adj}(l, l_1) \Rightarrow \text{ventando}(l_1)]$

Definição de "ventando":

1. $\forall l[\text{ventando}(l) \Leftrightarrow \exists l_1 \text{buraco}(l_1) \wedge \text{adj}(l, l_1)]$

Definição de "OK":

1. $\forall l, s[\text{OK}(l) \Leftrightarrow \neg\text{buraco}(l) \wedge \neg\text{local}(\text{Wumpu}, l, s)]$

Fazendo planos

Condição inicial em BC:

$\text{local}(\text{Agente}, [1,1], S_0)$

$\text{local}(\text{Ouro}, [1,2], S_0)$

Consulta:

$\text{ASK}(\text{BC}, \text{com}(\text{Ouro}, s))$

(Em que situação estarei com o ouro?)

Resposta:

$\{s/\text{Res}(pega, \text{Res}(anda, S_0))\}$

(Anda e depois pega o ouro.)

Uma outra forma para planos:

- Sequência de ações: $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Consulta:

$\text{ASK}(\text{BC}, \text{com}(\text{Ouro}, \text{plano}(p, S_0)))$

(Me dê um plano para conseguir o ouro a partir de S_0.)

Resposta:

$\{p/[anda, pega]\}$

(Anda e depois pega o ouro.)

Definição de plano em termos de Res:

$\forall s \ \text{plano}([], s) = s$

$\forall a, p, s \ \text{plano}([a|p], s) = \text{plano}(p, \text{Res}(a, s))$

Sistemas de **planejamento**: sistemas de propósito específico para este tipo de inferência.