O Sistema de Gentzen G:

- **Axiomas:** conjuntos de fórmulas com um par de literais complementares.

- **Regras de inferência:**

$$\frac{\vdash U_1 \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{\vdash U_1 \cup \{\alpha\}} \qquad \frac{\vdash U_1 \cup \{\beta_1\} \quad \vdash U_2 \cup \{\beta_2\}}{\vdash U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

Fórmulas α:

α	α_1	α_2
$\neg\neg A_1$	A_1	
$A_1 \vee A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \wedge A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \rightarrow A_2$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \uparrow A_2$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \downarrow A_2)$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \leftrightarrow A_2)$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	$\neg(A_2 \rightarrow A_1)$
$A_1 \oplus A_2$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	$\neg(A_2 \rightarrow A_1)$

Fórmulas β:

β	β_1	β_2
$B_1 \wedge B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \vee B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \uparrow B_2)$	B_1	B_2
$B_1 \downarrow B_2$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \leftrightarrow B_2$	$B_1 \rightarrow B_2$	$B_2 \rightarrow B_1$
$\neg(B_1 \oplus B_2)$	$B_1 \rightarrow B_2$	$B_2 \rightarrow B_1$

Ex. de dedução no sistema G:

1.	$\vdash \neg p, p, q$	Axioma
2.	$\vdash \neg p, (p \vee q)$	$\alpha\vee, 1$
3.	$\vdash \neg p, p, r$	Axioma
4.	$\vdash \neg p, (p \vee r)$	$\alpha\vee, 3$
5.	$\vdash \neg p, (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta\wedge, 2, 4$
6.	$\vdash \neg q, \neg r, p, q$	Axioma
7.	$\vdash \neg q, \neg r, (p \vee q)$	$\alpha\vee, 6$
8.	$\vdash \neg q, \neg r, p, r$	Axioma
9.	$\vdash \neg q, \neg r, (p \vee r)$	$\alpha\vee, 8$
10.	$\vdash \neg q, \neg r, (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta\wedge, 7, 9$
11.	$\vdash \neg(q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\alpha\wedge, 10$
12.	$\vdash \neg(p \vee (q \wedge r)), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\beta\vee, 5, 11$
13.	$\vdash (p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\alpha \rightarrow, 12$

O sistema de Hilbert H:

- **Axioma 1:**

$$\vdash A \to (B \to A).$$

- **Axioma 2:**

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

- **Axioma 3:**

$$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B).$$

- **Regra de inferência:**

$$\frac{\vdash A \qquad\qquad \vdash A \to B}{\vdash B}$$

Exemplo: dedução de $A \to A$:

1.	$\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	Axioma 2
2.	$\vdash A \to ((A \to A) \to A)$	Axioma 1
3.	$\vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP 1,2
4.	$\vdash A \to (A \to A)$	Axioma 1
5.	$\vdash A \to A$	MP 3,4

Procedimento de resolução:

Entrada: um conjunto de cláusulas S.
Saída: S é satisfatível ou não.

$R := S$;
laço
  escolha C_1 e C_2 em R com literais complementares *não escolhidos ainda*;
  se tais C_1 e C_2 não existirem **então**
    retorne S *é satisfatível*
  fimse;
  $C :=$ res(C_1, C_2);
  $R := R \cup \{C\}$;
  se $C = \Box$ **então**
    retorne S *é insatisfatível*
  fimse;
fimlaço.

Um exemplo de R.M. Smullyan:[1]

1. Se A é culpado e B é inocente, então C é culpado.
2. C nunca trabalha sozinho.
3. A nunca trabalha com C.
4. Pelo menos um dos três é culpado, já que ninguém mais esteve envolvido.

Quem é necessariamente culpado?

[1] What is the Name of this Book? The riddle of Dracula and other logical puzzles, Simon & Schuster, 1978