Departamento de Ciência da Computação | ICEx/UFMG
Lógica Aplicada a Computação | 1º semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Segunda Prova/Solução do professor | 27/06/2013

1. Suponha que você tenha algoritmos para determinar, dada uma fórmula, se ela é:

   a) tautologia;
   b) satisfatível.

   Explique como você poderia utilizar cada um desses dois algoritmos para determinar, dados um conjunto finito de fórmulas H e uma fórmula α, se $H \models \alpha$.

   Solução:

   Seja $H = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Para determinar se $H \models \alpha$:

   a) Verificar se $(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n) \rightarrow \alpha$ é tautologia, $n > 0$. Se $n = 0$, verificar se α é tautologia.
   b) Verificar se $(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n) \wedge \neg\alpha$ não é satisfatível, $n > 0$. Se $n = 0$, verificar se $\neg\alpha$ não é satisfatível.

2. Encontre deduções no sistema formal $\mathcal{S}_G$ para os seguintes sequentes:

   a) $\vdash \neg\neg p \rightarrow p$
   b) $\vdash ((p \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \leftrightarrow p$

   Solução:

a)

1.	$p \vdash p$	(Ax)
2.	$\vdash \neg p, p$	(negd 1)
3.	$\neg\neg p \vdash p$	(nege 2)
4.	$\vdash \neg\neg p \rightarrow p$	(condd 3)

b)

1.	$p \vdash \bot, p$	(Ax)
2.	$\vdash p \rightarrow \bot, p$	(condd 1)
3.	$\bot \vdash p$	(fale)
4.	$(p \rightarrow \bot) \rightarrow \bot \vdash p$	(conde 2,3)
5.	$p \vdash p, \bot$	(Ax)
6.	$p, \bot \vdash \bot$	(fale)
7.	$p, p \rightarrow \bot \vdash \bot$	(conde 5,6)
8.	$p \vdash (p \rightarrow \bot) \rightarrow \bot$	(condd 7)
9.	$\vdash ((p \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \leftrightarrow p$	(bicd 4,8)

3. Encontre deduções lineares, em resolução, que demonstrem as consequências:

a) $\{p \to q, (q \vee \neg r_1) \to (r_2 \wedge \neg s), p\} \models \neg s$.

b) $\{(p \vee s_1) \to (q \to s_2), (p \vee r_1) \to (s_2 \to s_3), p \wedge \neg r_3\} \models q \to s_3$.

Solução:

a)

1. $\neg p \vee q$	(B)
2. $\neg q \vee r_2$	(B)
3. $\neg q \vee \neg s$	(B)
4. $r_1 \vee r_2$	(B)
5. $r_1 \vee \neg s$	(B)
6. p	(B)
7. s	(nc)
8. $\neg q$	(7,3)
9. $\neg p$	(8,1)
10. $\bot$	(9,6)

b)

1. $\neg p \vee \neg q \vee s_2$	(B)
2. $\neg s_1 \vee \neg q \vee s_2$	(B)
3. $\neg p \vee \neg s_2 \vee s_3$	(B)
4. $\neg r_1 \vee \neg s_2 \vee s_3$	(B)
5. p	(B)
6. $\neg r_3$	(B)
7. q	(nc)
8. $\neg s_3$	(nc)
9. $\neg p \vee \neg s_2$	(8,3)
10. $\neg p \vee \neg q$	(9,1)
11. $\neg q$	(10,5)
12. $\bot$	(11,7)

4. Expresse em lógica de predicados:

a) *Nem tudo que reluz é ouro.*
Predicados unários: reluz e é-ouro.

b) *Quem gosta de Pedrinho não o conhece.*
Predicados binários: gosta e conhece.

c) *Gatos e cachorros atacam se são ameaçados.*
Predicados unários: gato, cachorro, ameaçado e ataca.

d) *Todos amam quem ama alguém.*
Predicado binário: ama.

Solução:

a) $\exists x(\text{reluz}(x) \wedge \neg\text{ouro}(x))$

b) $\forall x(\text{gosta}(x, \text{Pedrinho}) \to \neg\text{conhece}(x, \text{Pedrinho})))$

c) $\forall x[((\text{gato}(x) \vee \text{cachorro}(x)) \to (\text{ameaçado}(x) \to \text{ataca}(x))]$

d) $\forall x \forall y((\exists z\, \text{ama}(y, z)) \to \text{ama}(x, y))$

5. Mostre que $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \not\equiv \forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)$.
$\alpha(x)$ é uma fórmula cuja única variável livre é x.

Solução:

Uma interpretação com universo $\{e_1, e_2\}$ e tal que $v^i(\alpha(x)) = V$ para $x^i = e_1$, $v^i(\alpha(x)) = F$ para $x^i = e_2$, $v^i(\beta(x)) = F$ para $x^i = e_1$ e $v^i(\beta(x)) = V$ para $x^i = e_2$, satisfaz $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$, mas não satisfaz $\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)$. Logo, $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \not\equiv \forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)$.

6. Seja o argumento:

> *Todos amam quem ama alguém. Existe alguém que não ama a si mesmo. Portanto, alguém não me ama.*

Expresse-o em lógica de predicados e mostre que ele é válido. Caso queira, pode usar um sistema formal (tableaux, resolução , ...).

Solução:

O argumento diz:

$$\{\forall x \forall y((\exists z\, \mathrm{ama}(y,z)) \rightarrow \mathrm{ama}(x,y)), \exists x \neg \mathrm{ama}(x,x))\} \models \exists x \neg \mathrm{ama}(x, \mathrm{eu}).$$

Usando resolução:

1. $\neg\mathrm{ama}(y,z) \vee \mathrm{ama}(x,y)$	(primeira premissa)
2. $\neg\mathrm{ama}(a,a)$	(segunda premissa)
3. $\mathrm{ama}(x, \mathrm{eu})$	(negação da conclusão)
4. $\mathrm{ama}(x,y)$	(3,1)
5. $\perp$	(4,2)

Logo, o argumento é válido.