Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Demonstração de Teoremas — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2006
Professor: Newton José Vieira
Exercícios de Lógica Proposicional

1. Identifique as proposições simples que compõem os as proposicões a seguir, assim como os conectivos utilizados. Procure identificar o máximo possível de conectivos, isto é, considere uma proposição como simples somente se não for possível considerá-la composta. Há certos aspectos que não são representáveis em lógica proposicional; ignore-os.

   a) João é político mas é honesto.
   b) João é honesto, mas seu irmão não é.
   c) Virão à festa Marta ou sua irmã, além da mãe.
   d) A estrela do espetáculo não canta, dança, nem representa.
   e) Sempre que o trem apita, o menino sai correndo.
   f) Caso Joãozinho não perca o dinheiro no jogo, ele vai à feira.
   g) Aquele motorista vai ser multado, a menos que diminua a velocidade ou a rodovia não tenha radar.
   h) Vavá vai ao teatro somente se estiver em cartaz uma comédia.
   i) Se você for brasileiro, gosta de futebol, desde que não torça para o Tabajara.
   j) A propina será paga exatamente nas situações em que o deputado votar como instruído pela organização.
   k) Se Godofredo testemunhar e disser a verdade, será absolvido, mas se ele não testemunhar, não será absolvido.
   l) Se, mas somente se, Tião não peder o dinheiro no jogo, ele irá pagar o que lhe deve.
   m) Se Cacá for ao circo ou ao futebol hoje, ele estará sem dinheiro amanhã.

2. Considere o seguinte conjunto de proposições:

   > O mordomo é inocente ou culpado. Se o mordomo é inocente, então a testemunha mentiu. Se o mordomo tem um cúmplice, então a testemunha não mentiu. A testemunha tendo mentido ou não, o mordomo tem um cúmplice.

   Supondo que tais proposições sejam verdadeiras, responda: o mordomo é culpado ou é inocente? Explique sua resposta de uma forma coloquial, sem apelar para os conceitos e formalismos lógicos que porventura conheça.

3. Represente as proposições do exercício 1 por meio de fórmulas. Ao fazê-lo, indique que variáveis proposicionais representam que proposições simples. Como lá, procure usar o máximo possível de conectivos, isto é, considere uma proposição como simples somente se não for possível considerá-la composta. Aspectos não representáveis em lógica proposicional devem se ignorados.

4. Represente as proposições do exercício 2 por meio de fórmulas.

5. A disjunção vista nessas notas é a chamada disjunção *inclusiva*. Uma outra, menos usada em matemática (mas mais usada em outros contextos, como construção de circuitos digitais) é a disjunção *exclusiva*, em que se considera α "ou" β verdadeira apenas se α é verdadeira ou β verdadeira, mas não ambas. Faça a tabela da verdade para "ou exclusivo". Mostre como expressar "ou exclusivo" sem um símbolo específico para tal (ou seja, usando apenas os conectivos já vistos).

6. Descubra, para cada fórmula abaixo, se ela é tautológica, contraditória ou contingente. Em seguida, explique da maneira mais sucinta que puder a sua resposta:

   a) $\neg(\top \wedge \neg\bot) \leftrightarrow (\top \rightarrow \bot \vee \top)$
   b) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q$
   c) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$
   d) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$
   e) $\neg p \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow \neg q$

7. Considere as fórmulas obtidas para o Exercício 4. Construa um modelo para tal conjunto. Este modelo diz o que, caso se interprete as variáveis proposicionais de acordo com as proposições do Exercício 2?

8. Suponha que você tem algoritmos para determinar, para uma fórmula qualquer, se ela é (1) tautologia; (2) contradição; (3) satisfatível; (4) falseável. Explique como você poderia utilizar cada um desses quatro algoritmos para determinar, dados um conjunto de fórmulas H e uma fórmula α, se $H \models \alpha$. (Comece supondo que $H = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}\ldots$)

9. Mostre que $\{\neg p\} \models p \rightarrow q$.

10. Para os pares de fórmulas a seguir, descubra se são logicamente equivalentes, ou se uma é conseqüência lógica da outra. Em seguinda, explique da maneira mais sucinta que puder a sua resposta.

    a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ e $(p \vee q) \rightarrow r$
    b) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)$ e $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
    c) $p \leftrightarrow q$ e $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

11. Seguem alguns argumentos expressos em português. Expresse-os em lógica proposicional. Depois verifique se os mesmos são corretos usando o conceito de conseqüência lógica.

a) Se eu ganhei na megasena, então sou rico. Eu não ganhei na megasena. Logo, não sou rico.

b) Se não chover, a roça não produz e o pasto seca. Se o pasto seca, o gado não resiste. Portanto, se não chover, o gado não resiste.

c) João será absolvido ou condenado. Se for absolvido, será porque a testemunha mentiu. Mas a testemunha não mentiu. Portanto, João será condenado.

d) Se Deus é todo-poderoso e infinitamente bom, então não existe o diabo. Deus é todo-poderoso e existe o diabo. Portanto, Deus não é infinitamente bom.

e) Se você come demais, acaba ficando obeso. Se faz exercício físico todo dia, fica bem condicionado. E se não é obeso e é bem condicionado, não adoece com facilidade. Mas você adoece com facilidade. Portanto, você come demais e não faz exercício físico todo dia.

12. Uma abordagem para demonstração automática, alternativa ao método dedutivo, é baseada em verificar se um conjunto de fórmulas tem ou não um modelo. A abordagem é justificada pelo fato de que:

$$H \models \alpha \text{ se, e somente se } H \cup \{\neg\alpha\} \models \bot$$

ou melhor:

$$H \models \alpha \text{ se, e somente se } H \cup \{\neg\alpha\} \text{ não tem um modelo.}$$

Suponha que um algoritmo determine um modelo para $H \cup \{\neg\alpha\}$. Como tal modelo pode ser usado para justificar que $H \not\models \alpha$?

13. Especifique uma estratégia para provar afirmativas da forma $\alpha \oplus \beta$, em que $\oplus$ deve ser interpretado como "ou exclusivo".

14. Suponha que:

$$\begin{aligned}
&H \models \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n,\ n \geq 2;\\
&H \models \alpha_1 \to \beta;\\
&H \models \alpha_2 \to \beta;\\
&\vdots\\
&H \models \alpha_n \to \beta.
\end{aligned}$$

Mostre que, neste caso, $H \models \beta$. Formule uma estratégia de prova, *diferente da prova por casos*, justificável por este resultado.