Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Demonstração de Teoremas — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2006
Professor: Newton José Vieira
Teste Final — Entrega: até 06/07/2006 às 11:30h.
Valor: 20 pontos.
Descontos: 2 pontos a cada 5 minutos de atraso.

Para cada questão, apresente a prova final, como se fosse para publicar em um periódico de visibilidade nacional. Não escreva nenhum rascunho!

1. Prove que se x e y são números reais não negativos tais que $x + y = 0$, então $x = 0$ e $y = 0$.

2. **Definição.** Uma função f: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é injetora se, e somente se, para todo $x, y \in A$, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$.

   Prove que a função f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = mx + b$, com $m \neq 0$, é uma função injetora:

   a) Usando o método direto.
   b) Usando o método da contrapositiva.

3. **Definição.** Um conjunto X de números reais é um *conjunto convexo* se, e somente se, para todo $x, y \in X$ e todo número real t tal que $0 \leq t \leq 1$, $tx + (1 - t)y \in X$.

   Prove que sim ou que não:

   a) Para todo $n \geq 2$ se $\mathcal{F}$ é uma família de n conjuntos convexos, então $\cap\mathcal{F}$ é um conjunto convexo.
   b) Para todo $n \geq 2$ se $\mathcal{F}$ é uma família de n conjuntos convexos, então $\cup\mathcal{F}$ é um conjunto convexo.

4. Prove que se n é um inteiro positivo, então ou n é primo, ou n é um quadrado perfeito, ou $(n - 1)!$ é divisível por n.

5. **Definição.** Um número real x é um **ponto fixo** de uma função f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se, e somente se, $f(x) = x$.

   Suponha que f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é uma função com a propriedade de que existe um número real α, sendo $0 \leq \alpha < 1$, tal que para todos os números reais $x, y \in \mathbf{R}$, $|f(y) - f(x)| \leq \alpha|y - x|$.

   Prove que:

   a) Se x_* é um ponto fixo de f, então x_* é o único ponto fixo de f.
   b) Se x_* é um ponto fixo de f, $x_0 \in \mathbf{R}$ e para todo natural $n \geq 1$, $x_n = f(x_{n-1})$, então para todo natural $n \geq 0$, $|x_n - x_*| \leq \alpha^n|x_0 - x_*|$.

6. Prove que em uma fila de pelo menos duas pessoas, se a primeira for uma mulher e a última um homem, então em algum lugar da fila haverá um homem imediatamente atrás de uma mulher.

7. Prove que se n é um número inteiro maior do que 4, então o penúltimo dígito da representação decimal de 3^n é par.

8. Descreva métodos de prova por indução convenientes para provar que:

   a) Para todo inteiro $n \leq n_0$, $P(n)$ é verdadeira.

   b) Para todo inteiro n, $P(n)$ é verdadeira.

9. O que há de errado com a demonstração a seguir?

   Teorema. Se $n \geq 0$ e a é um certo número real fixo, então $a^n = 1$.

   Prova. Por indução matemática. Por definição, $a^0 = 1$. Seja n um número natural arbitrário e suponha, como hipótese de indução , que $a^k = 1$ para todo $0 \leq k \leq n$. O resultado será provado para $n + 1$. Pelas regras da álgebra:

$$a^{n+1} = \frac{a^n \times a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1.$$

   Assim, a conclusão está provada.

10. Dê três demonstrações diferentes de que se n é um inteiro maior que 0, então $n^2 - n$ é par.