Demonstração de Teoremas — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2010
Professor: Newton José Vieira — DCC/ICEx/UFMG
Primeira Prova/Solução do professor — 13/5/2010

1. Prove que um número inteiro positivo de 5 dígitos é divisível por 3 se a soma de seus dígitos é divisível por 3.

   Solução:

   Seja n um número inteiro positivo arbitrário de 5 dígitos, ou seja, $n = d_1 + 10d_2 + 100d_3 + 1000d_4 + 10000d_5$, sendo cada d_i um dígito de 0 a 9. Suponha que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$ é divisível por 3, ou seja, que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 3k$ para um inteiro positivo k. Segue-se que $d_1 = 3k - d_2 - d_3 - d_4 - d_5$ e, assim, $n = d_1 + 10d_2 + 100d_3 + 1000d_4 + 10000d_5 = (3k - d_2 - d_3 - d_4 - d_5) + 10d_2 + 100d_3 + 1000d_4 + 10000d_5$. Simplificando-se esta última expressão, chega-se a $n = 3k + 9d_2 + 99d_3 + 999d_4 + 9999d_5 = 3(k + 3d_2 + 33d_3 + 333d_4 + 3333d_5)$, o que mostra claramente que n é divisível por 3. Portanto, se n é um número inteiro positivo de 5 dígitos cuja soma é divisível por 3, n é divisível por 3.

2. Prove que se $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ para todo número real b, então a tem que ser 0.

   Solução:

   Como para dois números reais quaisquer a e b, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se $2ab = 0$, basta provar que se $2ab = 0$ para todo número real b, então a tem que ser 0. Seja a um número real arbitrário e suponha que $2ab = 0$ para todo número real b. Supondo-se que $a \neq 0$, então para $b \neq 0$ tem-se que $2ab \neq 0$, o que contradiz a afirmativa de que $2ab = 0$ para todo número real b. Logo, $a = 0$. Portanto, se $2ab = 0$ para todo número real b, então $a = 0$.

3. Prove que $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \backslash B = \emptyset$.

   Solução:

   ($\rightarrow$) Suponha que $A \subseteq B$. Suponha que $A \backslash B \neq \emptyset$ e seja x tal que $x \in A \backslash B$, ou seja, $x \in A$ e $x \notin B$. Como $A \subseteq B$ e $x \in A$, segue-se que $x \in B$. Contradição! Logo, não existe x tal que $x \in A \backslash B$, ou seja, $A \backslash B = \emptyset$.

   ($\leftarrow$) Suponha que $A \backslash B = \emptyset$. Seja x um membro arbitrário de A. Se $x \notin B$, como $x \in A$, segue-se que $x \in A \backslash B$, o que contradiz o fato de que $A \backslash B = \emptyset$. Portanto, $x \in B$ e, como x é um elemento arbitrário de A, $A \subseteq B$.

4. Prove que se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos e $A \in \mathcal{F}$, então $A \subseteq \cup\mathcal{F}$ e $\cap\mathcal{F} \subseteq A$.

   Solução:

   Suponha que $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos e $A \in \mathcal{F}$. Seja $x \in A$. Como $A \in \mathcal{F}$, então segue-se que $x \in \cup\mathcal{F}$. Como x é um elemento arbitrário de A, conclui-se que $A \subseteq \cup\mathcal{F}$. Para provar a outra parte, seja $x \in \cap\mathcal{F}$. Neste caso, $x \in X$ para todo $X \in \mathcal{F}$. Em particular, $x \in A$. Portanto, já que x é elemento arbitrário de $\cap\mathcal{F}$, $\cap\mathcal{F} \subseteq A$.

5. Suponha que $A \cap C \subseteq B \cap C$ e $A \cup C \subseteq B \cup C$. Prove que $A \subseteq B$.

   Solução:

   Suponha que $x \in A$. Considera-se dois casos:

   Caso 1: $x \in C$. Como $x \in A$, tem-se que $x \in A \cap C$. E como $A \cap C \subseteq B \cap C$, segue-se que $x \in B \cap C$ e, assim, $x \in B$.

   Caso 2: $x \notin C$. Como $x \in A$, tem-se que $x \in A \cup C$. E como $A \cup C \subseteq B \cup C$, segue-se que $x \in B \cup C$ e, já que $x \notin C$, conclui-se que $x \in B$.

   Como em qualquer caso $x \in B$ e x é um elemento arbitrário de A, $A \subseteq B$.