Demonstração de Teoremas 1º semestre de 2010
Professor: Newton José Vieira DCC/ICEx/UFMG
Segunda Prova 1/7/2010

1. Suponha que R e S sejam relações reflexivas sobre A. Prove que $R \circ S$ é reflexiva.
2. Suponha que R seja uma ordem parcial sobre A e que $B \subseteq A$. Prove que $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial sobre B.
3. Prove que para todo $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}(k+1).2^k = n.2^{n+1}$.
4. Prove que em uma sequência de dois ou mais números reais, se o último for maior ou igual ao primeiro elemento da sequência, então existem dois números x e y na sequência tais que y vem imediatamente após x e $y \geq x$.
5. Para cada número inteiro positivo n, seja $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, e seja

$$P_n = \{X \subseteq A_n \mid X \text{ não contém dois inteiros consecutivos}\}.$$

Por exemplo, $P_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$. Prove que para todo n, o número de elementos em P_n é F_{n+2}, o $n+2$-ésimo número de Fibonacci. (Por exemplo, o número de elementos em P_3 é $5 = F_5$.) *Dica*: considere que elementos de P_n contêm n e que elementos não contêm n.

Propriedades de relações: Seja $R \subseteq A \times A$.

- R é reflexiva sse $\forall a \in A(aRa)$.
- R é simétrica sse $\forall a_1, a_2 \in A(a_1Ra_2 \rightarrow a_2Ra_1)$.
- R é antisimétrica sse $\forall a_1, a_2 \in A(a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_1 \rightarrow a_1 = a_2)$.
- R é transitiva sse $\forall a_1, a_2, a_3 \in A(a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_3 \rightarrow a_1Ra_3)$.

Ordem parcial: relação binária reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Sequência de Fibonacci:

- $F_0 = 0$, $F_1 = 1$,
- para $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.