Demonstração de Teoremas — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2010
Professor: Newton José Vieira — DCC/ICEx/UFMG
Segunda Prova/Solução do professor — 1/7/2010

1. Suponha que R e S sejam relações reflexivas sobre A. Prove que $R \circ S$ é reflexiva.

   Solução:

   Seja x um elemento arbitrário de A. Como R e S são reflexivas, segue-se que xRx e xSx. Portanto, $(x,x) \in R \circ S$. Como x é elemento arbitrário de A, conclui-se que $R \circ S$ é reflexiva.

2. Suponha que R seja uma ordem parcial sobre A e que $B \subseteq A$. Prove que $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial sobre B.

   Solução:

   Inicialmente, observe que $R \cap (B \times B)$ é uma relação sobre B, pois $B \times B \subseteq A \times A$.

   1. $R \cap (B \times B)$ *é reflexiva.* Seja $b \in B$ arbitrário. Segue-se que $(b,b) \in B \times B$ e, como $B \subseteq A$, $b \in A$. E como R é reflexiva, bRb. Assim, $(b,b) \in R \cap (B \times B)$. Logo, $R \cap (B \times B)$ é reflexiva.
   2. $R \cap (B \times B)$ *é antissimétrica.* Sejam $b_1, b_2 \in B$ arbitrários e suponha que $(b_1,b_2) \in R \cap (B \times B)$ e $(b_2,b_1) \in R \cap (B \times B)$. Segue-se então que b_1Rb_2 e b_2Rb_1 e, como R é antissimétrica, $b_1 = b_2$. Conclui-se que $R \cap (B \times B)$ é antissimétrica.
   3. $R \cap (B \times B)$ *é transitiva.* Sejam $b_1, b_2, b_3 \in B$ arbitrários e suponha que $(b_1,b_2) \in R \cap (B \times B)$ e $(b_2,b_3) \in R \cap (B \times B)$. Segue-se então que b_1Rb_2 e b_2Rb_3 e, como R é transitiva, b_1Rb_3. E já que $(b_1,b_3) \in B \times B$, $(b_1,b_3) \in R \cap (B \times B)$. Portanto, $R \cap (B \times B)$ é transitiva.

3. Prove que para todo $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}(k+1).2^k = n.2^{n+1}$.

   Solução:

   Por indução sobre n. Para $n = 1$, tem-se que $\sum_{k=1}^{n}(k+1).2^k = (1+1).2^1 = 2.2^1 = 4 = 1.2^{1+1} = n.2^{n+1}$. Seja $n \geq 1$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{k=1}^{n}(k+1).2^k = n.2^{n+1}$. Então:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n+1}(k+1).2^k &= \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(k+1).2^k\right) + (n+2).2^{n+1} \\
&= n.2^{n+1} + (n+2).2^{n+1} && \text{pela hipótese de indução} \\
&= (n+n+2).2^{n+1} \\
&= (2n+2).2^{n+1} \\
&= (n+1).2^{n+2}.
\end{aligned}$$

4. Prove que em uma sequência de dois ou mais números reais, se o último for maior ou igual ao primeiro elemento da sequência, então existem dois números x e y na sequência tais que y vem imediatamente após x e $y \geq x$.

   Solução:

Por indução sobre o número de elementos da sequência. Para uma sequência de dois elementos, o resultado é óbvio, visto que os dois elementos são consecutivos. Considere uma sequência de $n \geq 2$ elementos e suponha, como hipótese de indução, que se seu último elemento for maior ou igual ao primeiro, então existem dois números x e y na sequência tais que y vem imediatamente após x e $y \geq x$. Seja agora uma sequência de $n+1$ elementos $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$ tal que $k_{n+1} \geq k_1$. Dois casos:
Caso 1. $k_n \geq k_1$. Neste caso, pela hipótese de indução, existem x e y na sequência dos primeiros n elementos tais que y vem imediatamente após x e $y \geq x$. Esses mesmos dois elementos satisfazem os requisitos para a sequência de $n+1$ elementos.
Caso 2. $k_n < k_1$. Segue-se, neste caso, que $k_{n+1} > k_n$. Basta pegar $x = k_n$ e $y = k_{n+1}$.

5. Para cada número inteiro positivo n, seja $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, e seja

$$P_n = \{X \subseteq A_n \mid X \text{ não contém dois inteiros consecutivos}\}.$$

Por exemplo, $P_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$. Prove que para todo n, o número de elementos em P_n é F_{n+2}, o $n+2$-ésimo número de Fibonacci. (Por exemplo, o número de elementos em P_3 é $5 = F_5$.) *Dica*: considere que elementos de P_n contêm n e que elementos não contêm n.

Solução:

Por indução sobre n. Seja $n \geq 1$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que para todo $0 < k < n$ $|P_k| = F_{k+2}$. Tem-se 3 casos:
Caso 1. $n = 1$. Como $P_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$ e $F_3 = 2$, $|P_n| = F_{n+2}$.
Caso 2. $n = 2$. Como $P_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ e $F_4 = 3$, $|P_n| = F_{n+2}$.
Caso 3. $n \geq 3$. $|P_n| = |P_{n-1}| + |P_{n-2}|$, visto que (a) os elementos de P_n que não contêm n são exatamente aqueles contidos em P_{n-1} e (b) os elementos de P_n que contêm n não contêm $n-1$, sendo aqueles formados por algum conjunto de P_{n-2} acrescido de n. Como $0 < n-1 < n$ e $0 < n-2 < n$, segue-se pela hipótese de indução que $|P_{n-1}| = F_{n+1}$ e $|P_{n-2}| = F_n$. Portanto, $|P_n| = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$.