LÓGICA PROPOSICIONAL

Argumentos válidos:

1
Vai chover ou gear à tarde.
Está muito quente para gear.
Logo, vai chover.

2
Se é domingo, não preciso ir para o trabalho.
Hoje é domingo.
Logo, não preciso ir para o trabalho hoje.

3
Eu vou para o trabalho hoje ou amanhã.
Eu vou ficar em casa hoje.
Logo, eu vou para o trabalho amanhã.

Argumentos incorretos:

4
Ou o mordomo é o culpado, ou a empregada.
Ou a empregada é a culpada, ou a cozinheira.
Logo, ou o mordomo é o culpado, ou a cozinheira.

5
Se é domingo, não preciso ir para o trabalho.
Não preciso ir para o trabalho hoje.
Logo, hoje é domingo.

Argumento válido: aquele em que, se as **premissas** são verdadeiras, a **conclusão** também é.

Argumento incorreto: aquele em que as **premissas** podem ser verdadeiras e a **conclusão** falsa, ao mesmo tempo.

Formas dos argumentos:

1	*Vai chover ou gear à tarde.* *Está muito quente para gear.* *Logo, vai chover.*

3	*Eu vou para o trabalho hoje ou amanhã.* *Eu vou ficar em casa hoje.* *Logo, eu vou para o trabalho amanhã.*

Forma:

$$\begin{array}{l} P \text{ ou } Q \\ \underline{\text{não } Q} \\ P \end{array}$$

Formas dos argumentos:

2

Se é domingo, não preciso ir para o trabalho.
Hoje é domingo.
Logo, não preciso ir para o trabalho hoje.

Forma:
$$\begin{array}{l} \text{se } P \text{ então } Q \\ \underline{P \qquad\qquad} \\ Q \end{array}$$

4

Ou o mordomo é o culpado, ou a empregada.
Ou a empregada é a culpada, ou a cozinheira.
Logo, ou o mordomo é o culpado, ou a cozinheira.

Forma:
$$\begin{array}{l} P \text{ ou } Q \\ \underline{Q \text{ ou } R} \\ P \text{ ou } R \end{array}$$

5

Se é domingo, não preciso ir para o trabalho.
Não preciso ir para o trabalho hoje.
Logo, hoje é domingo.

Forma:
$$\begin{array}{l} \text{se } P \text{ então } Q \\ \underline{Q \qquad\qquad} \\ P \end{array}$$

Variáveis proposicionais:

$P, Q, R, \ldots$

Três conectivos lógicos:

Conectivo	Significado
$\wedge$	e
$\vee$	ou
$\neg$	não

Exemplos de <u>fórmulas bem formadas</u>:

P	$\neg P$
$P \vee Q$	$P \wedge Q$
$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee Q$
$\neg(P \vee Q)$	$P \wedge (\neg Q \vee R)$
$\neg(P \wedge Q) \vee R$	$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Tabelas da Verdade

- **Negação:**

P	$\neg P$
V	F
F	V

- **Conjunção:**

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Disjunção:**

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela da Verdade para $\neg(P \wedge Q) \vee \neg R$:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg R$	$\neg(P \wedge Q) \vee \neg R$
V	V	V	V	F	F	**F**
V	V	F	V	F	V	**V**
V	F	V	F	V	F	**V**
V	F	F	F	V	V	**V**
F	V	V	F	V	F	**V**
F	V	F	F	V	V	**V**
F	F	V	F	V	F	**V**
F	F	F	F	V	V	**V**

Tabela da Verdade em formato compacto para $\neg(P \wedge Q) \vee \neg R$:

$\neg$	(	P	$\wedge$	Q	)	$\vee$	$\neg$	R
F		V	V	V		**F**	F	V
F		V	V	V		**V**	V	F
V		V	F	F		**V**	F	V
V		V	F	F		**V**	V	F
V		F	F	V		**V**	F	V
V		F	F	V		**V**	V	F
V		F	F	F		**V**	F	V
V		F	F	F		**V**	V	F

Determinando a veracidade de um argumento via Tabela da Verdade:

- **Argumento:**

  O mordomo e o cozinheiro não são ambos inocentes.
  O mordomo está mentindo ou o cozinheiro é inocente.
  Portanto, o mordomo está mentindo ou é culpado.

- **Variáveis proposicionais:**
  - M: o mordomo é inocente;
  - C: o cozinheiro é inocente;
  - L: o mordomo está mentindo.

- **A forma do argumento:**

  $\neg(M \wedge C)$
  $L \vee C$
  $L \vee \neg M$

- **Tabela da verdade para premissas e conclusão:**

M	C	L	$\neg(M \wedge C)$	$L \vee C$	$L \vee \neg M$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	F	F
F	V	V	**V**	**V**	**V**
F	V	F	**V**	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**	**V**
F	F	F	V	F	V

Fórmulas equivalentes:

Têm o mesmo valor V/F, para quaisquer valores de suas variáveis proposicionais.

Exemplos:

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Notação:

"$\equiv$" significa *é equivalente a*.

Exemplos: $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Exemplos de fórmulas equivalentes:

Leis de DeMorgan:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Leis Comutativas:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

Leis Associativas:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$$

Exemplos de fórmulas equivalentes:

Leis de Idempotência:

$$P \wedge P \equiv P$$

$$P \vee P \equiv P$$

Leis Distributivas:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Lei da Dupla Negação:

$$\neg\neg P \equiv P$$

Tautologias:

$\boxed{\textit{Fórmulas que são sempre verdadeiras.}}$

Exemplos:

$P \vee \neg P$

$\neg(P \wedge \neg P)$

$P \vee \neg P \vee Q$

Contradições:

$\boxed{\textit{Fórmulas que são sempre falsas.}}$

Exemplos:

$P \wedge \neg P$

$\neg(P \vee \neg P)$

$P \wedge \neg P \wedge Q$

Mais leis:

Leis das Tautologias: Seja T uma tautologia; então:

$P \wedge T \equiv P$

$P \vee T \equiv T$

$\neg T$ é uma contradição

Leis das Contradições: Seja C uma contradição; então:

$P \wedge C \equiv C$

$P \vee C \equiv P$

$\neg C$ é uma tautologia

Exemplo de simplificação de uma fórmula:

$\neg(P \vee (Q \wedge \neg R)) \wedge Q$

$$
\begin{array}{ll}
\equiv (\neg P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)) \wedge Q & \text{(DeMorgan)} \\
\equiv (\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg\neg R)) \wedge Q & \text{(DeMorgan)} \\
\equiv (\neg P \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge Q & \text{(dupla negação)} \\
\equiv \neg P \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge Q) & \text{(associatividade)} \\
\equiv \neg P \wedge (Q \wedge (\neg Q \vee R)) & \text{(comutatividade)} \\
\equiv \neg P \wedge ((Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)) & \text{(distributividade)} \\
\equiv \neg P \wedge ((Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg Q)) & \text{(comutatividade)} \\
\equiv \neg P \wedge (Q \wedge R) & \text{(contradição)}
\end{array}
$$

Predicado:

> *Símbolo que representa uma propriedade de objetos de um certo domínio.*

Exemplos de predicados:

Predicado	Significado
P	*é um número primo*
D	*é divisível por*
H	*é homem*
M	*é mulher*
F	*tem "tantos" filhos*

Variável:

> *Símbolo que pode ser substituído por um objeto de um certo domínio.*

Exemplos de expressões envolvendo predicados e variáveis:

Expressão	Significado
$P(x)$	*x é um número primo*
$D(x,y)$	*x é divisível por y*
$H(x)$	*x é homem*
$M(x)$	*x é mulher*
$F(x,y)$	*x tem y filhos*

Exemplos de fórmulas:

Fórmula	Valor V/F
$P(2)$	V
$P(2+2)$	F
$D(4,3)$	F
$H(\text{João})$	V
$M(\text{João})$	F
$F(\text{João}, 8)$	V
$P(2) \vee D(4,3)$	V
$\neg(H(\text{João}) \wedge M(\text{João}))$	V

O que têm em comum as seguintes entidades?

- um grupo de pessoas
- uma constelação
- uma dúzia de ovos
- os números inteiros
- os personagens de “O Alienista”, de Machado de Assis

Conjunto:

> *Coleção de objetos (concretos, abstratos e/ou fictícios), denominados <u>elementos</u> do conjunto.*

Notação:

- $a \in A$: a pertence a A
- $a \notin A$: a não pertence a A

Duas maneiras de definir um conjunto:

- Listar seus elementos entre chaves.
  - Exemplos:

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$\{1, 3, 5, \ldots\}$$

- Utilizar a forma $\{x \mid P(x)\}$.
  - Exemplos:

$$\{x \mid x \text{ é um inteiro positivo ímpar, menor que } 10\}.$$
$$\{x \mid x \text{ é um inteiro positivo ímpar}\}.$$

As seguintes afirmativas têm o mesmo significado:

- $y \in \{x \mid P(x)\}$ e $P(y)$
- $y \notin \{x \mid P(x)\}$ e $\neg P(y)$

Alguns conjuntos (domínios) importantes:

- $\mathbf{R}= \{x \mid x$ é um número real$\}$
- $\mathbf{Q}= \{x \mid x$ é um número racional$\}$
- $\mathbf{Z}= \{x \mid x$ é um número inteiro$\}$
- $\mathbf{N}= \{x \mid x$ é um número natural$\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Notações alternativas:

$\{x \in U \mid P(x)\}$ significa $\{x \mid x$ pertence a $U \wedge P(x)\}$

Exemplos:

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 < 9\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 9\} = \cdots ?$$

Conjunto-verdade (*truth set*) de uma afirmativa $P(x)$:

$$\boxed{\textit{Conjunto-verdade de } P(x) = \{x \mid P(x)\}.}$$

Valores extremos para $\{x \mid P(x)\}$:

- o **conjunto universo**, quando $P(x)$ é V para todo x.
- o **conjunto vazio**, $\phi = \{\}$, quando $P(x)$ é F para todo x.

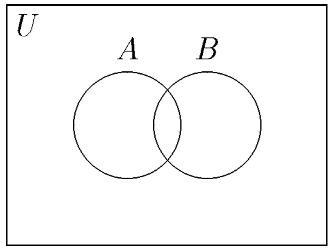
Exemplos:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \geq 0\} = \mathbf{R}$$

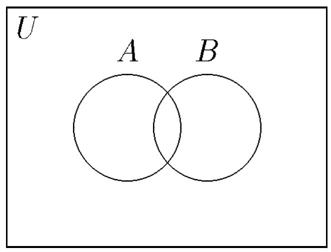
$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x \neq x\} = \phi$$

Operações sobre conjuntos:

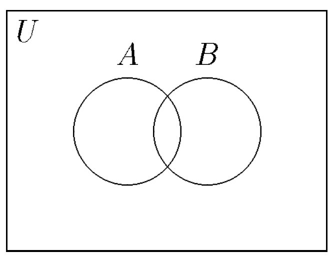
- **Interseção:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



- **União:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



- **Diferença:** $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



Se dois conjuntos têm o mesmo diagrama de Venn, então são iguais.

Sejam:

- $A = \{x \mid P(x)\}$
- $B = \{x \mid Q(x)\}$

Então:

- $\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = A \cap B$
- $\{x \mid P(x) \vee Q(x)\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$
- $\{x \mid \neg P(x)\} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = U \backslash A$

Mostrando que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

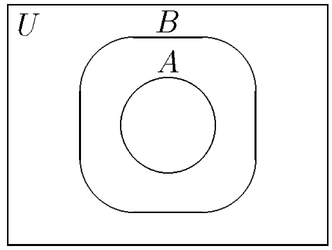
1. $x \in A \cap (B \cup C)$
   equivale a $x \in A \wedge x \in B \cup C$ (def. de $\cap$)
   equivale a $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (def. de $\cup$)

2. $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   equivale a $x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$ (def. de $\cup$)
   equivale a $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (def. de $\cap$)

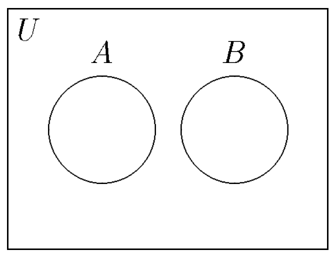
3. estas duas afirmativas são logicamente equivalentes.

Relações entre conjuntos:

- **Subconjunto:** $A \subseteq B$ se todo elemento de A é também elemento de B.



- **Disjuntos:** A e B são disjuntos se $A \cap B = \phi$.



Exemplos:

Para quaisquer conjuntos A e B:

- $A \cap B$ e $A \backslash B$ são disjuntos.
- $(A \cup B) \backslash B \subseteq A$.

O conectivo condicional:

Conectivo	Significado
$\rightarrow$	se ... então ... (implica)

Voltando ao argumento 2:

2

Se é domingo, não preciso ir para o trabalho.
Hoje é domingo.
Logo, não preciso ir para o trabalho hoje.

Forma:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{P \qquad\qquad} \\ Q \end{array}$$

Outro exemplo:

Se está chovendo e estou sem guarda-chuva, então ficarei molhado.

Forma: $(C \wedge \neg G) \rightarrow M$,

onde:

C designa "*está chovendo*";
G designa "*estou com guarda-chuva*"; e
M designa "*ficarei molhado*".

Tabela da Verdade para o conectivo condicional:

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Uma justificativa:

Considere a afirmativa

$$\boxed{se\ x > 2\ então\ x^2 > 4}$$

para $x = 3, -5, 1.$

Leis relativas ao conectivo condicional:

Leis do condicional:

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$P \to Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

Lei da contrapositiva:

$$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$$

Maneiras alternativas de dizer "$P \to Q$", em Matemática:

- se P então Q
- Q, se P
- P somente se Q
- P implica Q
- P é condição suficiente para Q
- Q é condição necessária para P

O conectivo bicondicional:

Conectivo	Significado
$\leftrightarrow$	se ... e somente se ...

O conectivo "$\leftrightarrow$" deve ser tal que:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Tabela da Verdade para o conectivo bicondicional:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Maneiras alternativas de dizer "$P \leftrightarrow Q$", em Matemática:

- P se, e somente se Q
- P é condição necessária e suficiente para Q