LÓGICA DE PREDICADOS

O quantificador universal:

Quantificador	Significado
$\forall$	para todo elemento do universo

Exemplos:

- $\forall x\, x^2 \geq 0$
- $\forall x\, (x > 2 \rightarrow x^2 > 4)$
- $\forall x\, \text{gosta}(x, \text{Maria})$
- $\forall x\, (\text{humano}(x) \rightarrow \text{mortal}(x))$
- $\forall x\, (\neg\text{gosta}(x, \text{João}) \rightarrow \text{gosta}(\text{Suzana}, x))$
- $\forall x\, (\text{gosta}(x, \text{João}) \rightarrow (\text{maluco}(x) \vee \text{santo}(x)))$

O quantificador existencial:

Quantificador	Significado
$\exists$	existe um ou mais elementos tais que

Exemplos:

- $\exists x\, x^2 - 2x + 3 = 0$
- $\exists x\, \text{gosta}(x, \text{João})$
- $\exists x\, (\text{humano}(x) \land \text{canhoto}(x))$
- $\neg\exists x\, \text{perfeito}(x)$
- $\forall x\, (\text{perdedor}(x) \rightarrow \neg\exists y \text{gosta}(y, x))$
- $\forall x \exists y\, \text{gosta}(x, y)$
- $\exists y \forall x\, \text{gosta}(x, y)$

Leis da negação de quantificadores:

$$\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$$
$$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

Determinar fórmulas correspondentes às afirmativas:

- $A \subseteq B$
- $A \not\subseteq B$
- *Toda pessoa tem um parente do qual ela não gosta.*
- A negação da afirmativa acima.
- *João é bígamo.*
- *Todos gostam de pelo menos duas pessoas.*
- *João gosta de exatamente uma pessoa.*

Abreviatura:

$\exists! x$ significa *existe exatamente um elemento x tal que.*

Duas notações úteis:

- $\forall x \in A F$ significa $\forall x (x \in A \rightarrow F)$
- $\exists x \in A F$ significa $\exists x (x \in A \wedge F)$

Exemplos:

- $\forall x \in \mathbf{N}\, x \geq 0$
- $\forall x \in \mathbf{R}\, x \geq 0$
- $\forall x \in \mathbf{R}^+ \exists y\, y^2 = x$
- $\forall x \in \mathbf{R}^+ \exists y \in \mathbf{R}^-\, y^2 = x$

As leis da negação de quantificadores continuam valendo:

$$\neg \exists x \in A\, P(x) \equiv \forall x \in A\, \neg P(x)$$
$$\neg \forall x \in A\, P(x) \equiv \exists x \in A\, \neg P(x)$$

O que dizer de:

- $\exists x \in AP(x)$
- $\forall x \in AP(x)$

se $A = \phi$?

Distributividade dos quantificadores:

- $\forall$ distribui sobre $\wedge$:
  $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
- $\exists$ distribui sobre $\vee$:
  $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
A = B \text{ significa } & \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B) \\
& \equiv \forall x\,[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)] \\
& \equiv \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A) \\
& \text{significado de } A \subseteq B \wedge B \subseteq A
\end{aligned}
$$

Conjunto indexado:

> *Aquele que pode ser definido da forma:*
>
> $\{e_i \mid i \in I\}$
>
> I*: o conjunto índice (seus elementos são denominados índices).*

Exemplos:

- $\{p_i \mid i \in J\}$, onde $J = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ e p_i é o i-ésimo número primo.
- $\{m_a \mid a \in A\}$, onde A = conjunto de todos os alunos da UFMG e m_a é a mãe do aluno a.

Família de conjuntos:

$\boxed{\textit{conjunto cujos elementos são todos conjuntos.}}$

Exemplo:

- $\{C_a \mid a \in A\}$, onde A = conjunto de todos os alunos da UFMG e C_a é o conjunto das disciplinas já cursadas por a.

Conjunto potência de A:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}}$$

Para uma família de conjuntos $\mathcal{F}$:

- $\cap\mathcal{F} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{F}\,(x \in A)\} = \{x \mid \forall A\,(A \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)\}$
- $\cup\mathcal{F} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{F}\,(x \in A)\} = \{x \mid \exists A\,(A \in \mathcal{F} \wedge x \in A)\}$