

MÉTODOS DE PROVA

Enunciado de um teorema:

- Hipóteses
- Conclusão

Exemplos:

- **Teorema.** *Sejam $x > 3$ e $y < 2$. Então $x^2 - 2y > 5$.*
- **Teorema.** *Suponha que a e b sejam números reais. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.*
- **Teorema.** *Suponha que $A \cap B \subseteq C$ e $a \in C$. Então $a \notin A \setminus B$.*

Uma estratégia para provar $P \rightarrow Q$ – prova direta:

Supor que P é verdadeira. Provar Q .

- Antes de usar a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{P \rightarrow Q}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{Q}$$

P

- Formato final da prova:

Suponha P .

[Prova de Q .]

Portanto, $P \rightarrow Q$.

Exemplo:

Teorema. *Suponha que a e b sejam números reais.*

Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

- Antes de usar a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{a \text{ e } b \text{ são números reais}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{(0 < a < b) \rightarrow (a^2 < b^2)}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{a \text{ e } b \text{ são números reais} \\ 0 < a < b} \qquad \frac{\textit{A provar}}{a^2 < b^2}$$

- Formato final da prova:

Suponha que $0 < a < b$.

[Prova de $a^2 < b^2$.]

Portanto, $(0 < a < b) \rightarrow (a^2 < b^2)$.

Outra estratégia para provar $P \rightarrow Q$ – contrapositiva:

Supor que Q é falsa. Provar que P é falsa.

- Antes de usar a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{P \rightarrow Q}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{\neg P}$$
$$\neg Q$$

- Formato final da prova:

Suponha que Q é falsa.

[Prova de $\neg P$.]

Portanto, $P \rightarrow Q$.

Exemplo:

Teorema. *Suponha que a , b e c sejam números reais e que $a > b$. Se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.*

- Antes de usar a estratégia:

$$\frac{\text{Suposições}}{a, b \text{ e } c \text{ são números reais} \quad a > b} \qquad \frac{A \text{ provar}}{ac \leq bc \rightarrow c \leq 0}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\text{Suposições}}{a, b \text{ e } c \text{ são números reais} \quad a > b \quad c > 0} \qquad \frac{A \text{ provar}}{ac > bc}$$

- Formato final da prova:

Será provada a contrapositiva. Suponha que $c > 0$.

[Prova de $ac > bc$.]

Portanto, se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Uma estratégia para provar $\neg P$:

Obter uma forma equivalente positiva, e utilizar uma estratégia relativa a esta forma.

Exemplo:

Teorema. Suponha que $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$. Então $a \notin A \setminus B$.

- Antes de usar a estratégia: Após reexpressar $a \notin A \setminus B$:

$$\begin{array}{c|c} \frac{\text{Suposições}}{A \cap C \subseteq B} & \frac{A \text{ provar}}{a \notin A \setminus B} \\ \hline a \in C & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c|c} \frac{\text{Suposições}}{A \cap C \subseteq B} & \frac{A \text{ provar}}{a \in A \rightarrow a \in B} \\ \hline a \in C & \end{array} \right.$$

- Usando a estratégia de prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{A \cap C \subseteq B} \quad \frac{A \text{ provar}}{a \in B}$$

$a \in C$
 $a \in A$

- Formato final da prova:

Suponha que $a \in A$.

[Prova de $a \in B$.]

Portanto, se $a \notin A \setminus B$.

Outra estratégia para provar $\neg P$ – por contradição:

Suponha que P é verdadeira, e obtenha uma contradição.

- Antes de usar a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{\neg P}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{\textit{Uma contradição}}$$
$$P$$

- Formato final da prova:

Suponha que P é verdadeira.

[Prova de uma contradição.]

Portanto, P é falsa.

Exemplo:

Teorema. Se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

- Usando a estratégia da prova direta:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Suposições} \\ x^2 + y = 13 \\ y \neq 4 \end{array}}{\quad} \quad \frac{\begin{array}{l} \textit{A provar} \\ x \neq 3 \end{array}}{\quad}$$

- Formato intermediário da prova:

Suponha que $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$.

[Prova que $x \neq 3$.]

Portanto, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

- Usando a estratégia de prova por contradição:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Suposições} \\ x^2 + y = 13 \\ y \neq 4 \\ x = 3 \end{array}}{\quad} \quad \frac{\begin{array}{l} \textit{A provar} \\ \text{uma contradição} \end{array}}{\quad}$$

- Formato final da prova:

Suponha que $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$.

Suponha que $x = 3$.

[Prova de uma contradição.]

Portanto, $x \neq 3$.

Portanto, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Prova por Contradição pode ser usada para provar conclusões positivas também.

Exemplo:

Teorema. *Sejam os conjuntos A , B e C , $A \setminus B \subseteq C$. Se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.*

- Usando a estratégia da prova direta:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Suposições} \\ A \setminus B \subseteq C \\ x \in A \setminus C \end{array}}{\quad} \quad \frac{\begin{array}{l} \textit{A provar} \\ x \in B \end{array}}{\quad}$$

- Formato intermediário da prova:

Suponha que $x \in A \setminus C$.

[Prova que $x \in B$.]

Portanto, se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

- Usando a estratégia de prova por contradição:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Suposições} \\ A \setminus B \subseteq C \\ x \in A \setminus C \\ x \notin B \end{array}}{\quad} \quad \frac{\begin{array}{l} \textit{A provar} \\ \text{uma contradição} \end{array}}{\quad}$$

- Formato intermediário da prova:

Suponha que $x \in A \setminus C$.

Suponha que $x \notin B$.

[Prova de uma contradição.]

Portanto, $x \in B$.

Portanto, se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

- Expandindo a segunda suposição, tudo fica claro:

<i>Suposições</i>	<i>A provar</i>
$A \setminus B \subseteq C$	uma contradição
$x \in A$	
$x \notin C$	
$x \notin B$	

Uma estratégia para uso de suposição da forma $\neg P$:

<i>Obter uma forma equivalente positiva.</i>
--

Estratégias para uso de suposição da forma $P \rightarrow Q$:

Se P for suposição, ou for provado, conclui-se Q (modus ponens).

Se $\neg Q$ for suposição, ou for provado, conclui-se $\neg P$ (modus ponens).

Exemplo:

Teorema. *Suponha que $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Então $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$*

- No início:

$$\frac{\text{Suposições}}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)} \qquad \frac{A \text{ provar}}{\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)}$$

- Usando a estratégia da prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)} \qquad \frac{A \text{ provar}}{P \rightarrow \neg Q}$$

$\neg R$

- Formato intermediário da prova:

Suponha $\neg R$.

[Prova de $P \rightarrow \neg Q$.]

Portanto, $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$.

- Usando a estratégia da prova direta de novo:

$$\frac{\textit{Suposições}}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)} \quad \frac{\textit{A provar}}{\neg Q}$$
$$\neg R$$
$$P$$

- Formato final da prova:

Suponha $\neg R$.

Suponha P .

[Prova de $\neg Q \Rightarrow \textit{modus ponens e modus tollens.}$]

Portanto, $P \rightarrow \neg Q$.

Portanto, $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$.

Estratégia para provar $\forall xP(x)$:

Seja x um objeto arbitrário; prove $P(x)$. (Se x já está sendo usada para alguma outra coisa na prova, escolha uma variável não usada, digamos y , e prove $P(y)$.)

- Antes de usar a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{\forall xP(x)}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\textit{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{P(x)}$$

- Formato final da prova:

Seja x arbitrário.

[Prova de $P(x)$.]

Como x é arbitrário, conclui-se que $\forall xP(x)$.

Exemplo:

Teorema. *Sejam dois conjuntos A e B . Se $A \cap B = A$, então $A \subseteq B$.*

- Usando a estratégia da prova direta:

$$\frac{\textit{Suposições}}{A \cap B = A} \qquad \frac{A \textit{ provar}}{\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)}$$

- Usando a estratégia do objeto arbitrário e da prova direta:

$$\frac{\textit{Suposições}}{A \cap B = A} \qquad \frac{A \textit{ provar}}{x \in B}$$
$$x \in A$$

- Formato final da prova:

Suponha $A \cap B = A$.

Seja x arbitrário.

Suponha $x \in A$.

[Prova de $x \in B$.]

Portanto, $x \in A \rightarrow x \in B$.

Como x é arbitrário, conclui-se que $\forall(x \in A \rightarrow x \in B)$ e, portanto, $A \subseteq B$.

Portanto, se $A \cap B = A$ então $A \subseteq B$.

Estratégia para provar $\exists x P(x)$:

Seja $x =$ (um objeto específico); prove $P(x)$ para o valor referido. (Se x já está sendo usada para alguma outra coisa na prova, escolha uma variável não usada, digamos y , e prove $P(y)$.)

- Antes de usar a estratégia:

$$\frac{\textit{Suposições}}{\text{Hipóteses}} \qquad \frac{\textit{A provar}}{\exists x P(x)}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\frac{\textit{Suposições}}{\text{Hipóteses}}}{x = (\text{um objeto específico})} \qquad \frac{\textit{A provar}}{P(x)}$$

- Formato final da prova:

Seja $x =$ (um objeto específico).

[Prova de $P(x)$.]

Portanto, $\exists x P(x)$.

Exemplo:

Teorema. *Para qualquer número real x , se $x > 0$ então existe um número real y tal que $y(y + 1) = x$.*

- Usando a estratégia da prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{x > 0} \qquad \frac{A \text{ provar}}{\exists y[y(y + 1) = x]}$$

- Determinado y tal que $\exists y[y(y + 1) = x]$:

$$y(y + 1) = x \Rightarrow y^2 + y - x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

- Formato final da prova:

Seja x um número real arbitrário.

Suponha $x > 0$.

Seja $y = (-1 + \sqrt{1 + 4x})/2$.

[Prova de $y(y + 1) = x$.]

Assim, $\exists y[y(y + 1) = x]$.

Portanto, $x > 0 \rightarrow \exists y[y(y + 1) = x]$.

Sendo x arbitrário, conclui-se que $\forall x[x > 0 \rightarrow \exists y[y(y + 1) = x]]$.

Estratégia para uso de suposição da forma $\exists xP(x)$:

Introduzir x_0 para dar nome a um objeto para o qual $P(x_0)$ é verdadeiro (instanciação existencial).

Estratégia para uso de suposição da forma $\forall xP(x)$:

x pode ser substituído por qualquer valor a , para concluir-se $P(a)$ (instanciação universal).

Exemplo:

Teorema. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ famílias de conjuntos, e $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
Então $\cap \mathcal{F} \subseteq \cup \mathcal{G}$.*

- Usando a estratégia do objeto arbitrário e da prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset} \quad \frac{A \text{ provar}}{x \in \cup \mathcal{G}}$$
$$x \in \cap \mathcal{F}$$

- Expandindo em termos de símbolos lógicos:

$$\frac{\text{Suposições}}{\exists A(A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G})} \quad \frac{A \text{ provar}}{\exists A \in \mathcal{G}(x \in A)}$$
$$\forall A \in \mathcal{F}(x \in A)$$

- Por instanciação existencial:

$$\frac{\text{Suposições}}{A_0 \in \mathcal{F}} \quad \frac{A \text{ provar}}{\exists A \in \mathcal{G}(x \in A)}$$
$$A_0 \in \mathcal{G}$$
$$\forall A \in \mathcal{F}(x \in A)$$

Outro exemplo:

Teorema. *Sejam B um conjunto e $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. Se $\cup \mathcal{F} \subseteq B$ então $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(B)$.*

- Usando a estratégia do objeto arbitrário e da prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{\cup \mathcal{F} \subseteq B} \quad \frac{A \text{ provar}}{X \in \mathcal{P}(B)}$$
$$X \in \mathcal{F}$$

- Expandindo em símbolos lógicos e usando prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{\cup \mathcal{F} \subseteq B} \quad \frac{A \text{ provar}}{y \in B}$$
$$X \in \mathcal{F}$$
$$y \in X$$

- Expandindo a primeira suposição:

$$\frac{\text{Suposições}}{\forall x(x \in \cup \mathcal{F} \rightarrow x \in B)} \quad \frac{A \text{ provar}}{y \in B}$$
$$X \in \mathcal{F}$$
$$y \in X$$