

Estratégia para provar $P \wedge Q$:

Provar P e Q separadamente.

Estratégia para uso de suposição da forma $P \wedge Q$:

Tratá-la como duas suposições: P e Q .

Exemplo:

Teorema. *Sejam $A \subseteq B$, e A e C disjuntos. Então $A \subseteq B \setminus C$.*

- No início:

$$\begin{array}{c} \textit{Suposições} \\ \hline A \subseteq B \\ A \cap C = \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \textit{A provar} \\ \hline A \subseteq B \setminus C \end{array}$$

- Usando estratégias do x arbitrário, da prova direta e da separação:

$$\begin{array}{c} \textit{Suposições} \\ \hline A \subseteq B \\ A \cap C = \phi \\ x \in A \end{array} \quad \begin{array}{c} \textit{A provar} \\ \hline x \in B \\ x \notin C \end{array}$$

- Formato final da prova:

Seja um x arbitrário.

Suponha que $x \in A$.

[Prova de $x \in B$].

[Prova de $x \notin C$].

Logo, $x \in B \wedge x \notin C$ e, assim, $x \in B \setminus C$.

Portanto, $x \in A \rightarrow x \in B \setminus C$.

Como x é arbitrário, $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B \setminus C)$ e, logo, $A \subseteq B \setminus C$.

Estratégia para provar $P \leftrightarrow Q$:

<i>Provar $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$ separadamente.</i>
--

Estratégia para uso de suposição da forma $P \leftrightarrow Q$:

<i>Tratá-la como duas suposições: $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$.</i>
--

Exemplo:

Teorema. *Seja um número inteiro x . Então x é par se, e somente se, x^2 é par.*

- Usando estratégia da prova direta para $(x \text{ é par}) \rightarrow (x^2 \text{ é par})$:

$$\frac{\text{Suposições}}{x \in \mathbf{Z} \quad x \text{ é par}} \quad \frac{A \text{ provar}}{x^2 \text{ é par}}$$

- Usando a definição de *par*:

$$\frac{\text{Suposições}}{x \in \mathbf{Z} \quad \exists k \in \mathbf{Z}(x = 2k)} \quad \frac{A \text{ provar}}{\exists n \in \mathbf{Z}(x^2 = 2n)}$$

- Usando instanciação existencial:

$$\frac{\text{Suposições}}{x \in \mathbf{Z} \quad k \in \mathbf{Z} \quad x = 2k} \quad \frac{A \text{ provar}}{\exists n \in \mathbf{Z}(x^2 = 2n)}$$

(Assim, um $n \in \mathbf{Z}$ tal que $x^2 = 2n$ seria $2k^2$.)

- De forma similar, usa-se a estratégia da contrapositiva para $(x^2 \text{ é par}) \rightarrow (x \text{ é par})$.

Às vezes é possível provar $P \leftrightarrow Q$ por meio de um “encadeamento” de *se, e somente se*’s.

Exemplo:

Teorema. *Sejam A , B e C conjuntos. Então $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.*

Duas abordagens:

- Provar $A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus C$ e $(A \cap B) \setminus C \subseteq A \cap (B \setminus C)$.
- Provar $x \in A \cap (B \setminus C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$, para x arbitrário.

Para este exemplo, pode-se provar

$$x \in A \cap (B \setminus C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$$

usando-se um encadeamento de *se, e somente se*’s.

É errado começar escrevendo $P \leftrightarrow Q$, depois substituir P e Q por equivalentes, e assim sucessivamente, até que se obtenha a mesma afirmativa de ambos os lados de $\leftrightarrow$.

Estratégia p/ suposição da forma $P \vee Q$:

Dividir a prova em casos. Caso 1: supor P verdadeiro e fazer a prova. Caso 2: supor Q verdadeiro e fazer a prova.

- No início:

$$\frac{\textit{Suposições}}{P \vee Q} \qquad \frac{\textit{A provar}}{X}$$

etc.

- Usando a estratégia de divisão em casos:

$$\text{Caso 1: } \frac{\textit{Suposições}}{P} \qquad \frac{\textit{A provar}}{X}$$

etc.

$$\text{Caso 2: } \frac{\textit{Suposições}}{Q} \qquad \frac{\textit{A provar}}{X}$$

etc.

- Formato final da prova:

Caso 1. P é verdadeiro.
[Prova de X].

Caso 2. Q é verdadeiro.
[Prova de X].

Como se sabe que $P \vee Q$, estes casos cobrem todas as possibilidades; portanto, X é verdadeiro.

Exemplo:

Teorema. *Sejam A , B e C conjuntos. Então se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$.*

- Inicialmente:

<i>Suposições</i>	<i>A provar</i>
$A \subseteq C$ $B \subseteq C$	$\forall x(x \in A \cup B \rightarrow x \in C)$

- Usando estratégias do x arbitrário e da prova direta:

<i>Suposições</i>	<i>A provar</i>
$A \subseteq C$ $B \subseteq C$ $x \in A \vee x \in B$	$x \in C$

- Formato final da prova:

Suponha que $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.

Seja x arbitrário.

Suponha que $x \in A \cup B$, ou seja, $x \in A \vee x \in B$.

Caso 1. $x \in A$. [Prova de $x \in C$.]

Caso 2. $x \in B$. [Prova de $x \in C$.]

Como $x \in A \vee x \in B$, estes casos implicam que $x \in C$.

Como x é arbitrário, tem-se que $A \cup B \subseteq C$

Logo, se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, $A \cup B \subseteq C$.

Estratégia para provar $P \vee Q$:

Divida a prova em dois casos. Em um prove P , e no outro prove Q .

Exemplo:

Teorema. *Sejam A , B e C conjuntos. Então $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup C$.*

- Usando estratégias do x arbitrário e da prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)} \quad \frac{A \text{ provar}}{(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in C}$$

- Usando separação e De Morgan:

$$\frac{\text{Suposições}}{x \in A \quad x \notin B \vee x \in C} \quad \frac{A \text{ provar}}{(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in C}$$

- Usando a estratégia de divisão em casos/Caso 1:

$$\frac{\text{Suposições}}{x \in A \quad x \notin B} \quad \frac{A \text{ provar}}{(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in C}$$

- Caso 2: similar.

Qualquer prova pode ser dividida em casos, desde que os casos esgotem todas as possibilidades.

Exemplo:

Teorema. *Para todo inteiro x , o resto da divisão de x^2 por 4 é 0 ou 1.*

- No início:

$$\frac{\text{Suposições}}{x \in \mathbf{Z}} \quad \frac{A \text{ provar}}{(x^2 \div 4 \text{ tem resto } 0) \vee (x^2 \div 4 \text{ tem resto } 1)}$$

- Dividindo em casos:

$$\begin{array}{l} \text{Caso 1: } \frac{\text{Suposições}}{x \in \mathbf{Z}} \quad \frac{A \text{ provar}}{x^2 \div 4 \text{ tem resto } 0} \\ x \text{ é par} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Caso 2: } \frac{\text{Suposições}}{x \in \mathbf{Z}} \quad \frac{A \text{ provar}}{x^2 \div 4 \text{ tem resto } 1} \\ x \text{ é ímpar} \end{array}$$

Outra estratégia para provar $P \vee Q$:

Suponha $\neg P$, e prove Q .

Exemplo:

Teorema. *Para todo número real x , se $x^2 \geq x$, então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.*

- Usando estratégias do x arbitrário e da prova direta:

$$\frac{\text{Suposições}}{x^2 \geq x} \quad \frac{A \text{ provar}}{x \leq 0 \vee x \geq 1}$$

- Usando a estratégia:

$$\frac{\text{Suposições}}{x^2 \geq x} \quad \frac{A \text{ provar}}{x \geq 1}$$

$x > 0$

Outra estratégia p/ suposição da forma $P \vee Q$:

Se $\neg P$ for verdadeiro ou for provado, concluir que Q é verdadeiro.

As seguintes fórmulas são equivalentes:

- $\exists x[P(x) \wedge \neg \exists y(P(y) \wedge y \neq x)]$
- $\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x)]$
- $\exists x \forall y[P(y) \leftrightarrow y = x]$
- $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z[(P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z]$

Estratégia para provar $\exists! x P(x)$:

Provar:

- a existência: $\exists x P(x)$; e
- a unicidade: $\forall y \forall z[(P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z]$.

Exemplo:

Teorema. *Existe um único conjunto A tal que para todo conjunto B , $A \cup B = B$.*

- Prova de existência:

$$\frac{\textit{Suposições}}{-} \quad \frac{A \textit{ provar}}{\exists A \forall B (A \cup B = B)}$$

(Qual a escolha óbvia para A ?)

- Prova de unicidade (C e D , arbitrários; prova direta):

$$\frac{\textit{Suposições}}{\forall B (C \cup B = B)} \quad \frac{A \textit{ provar}}{C = D}$$
$$\forall B (D \cup B = B)$$

(Qual a escolha para B em cada suposição?)

Outra estratégia para provar $\exists!xP(x)$:

$Provar \exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x)]$

Exemplo:

Teorema. *Para todo número real x , se $x \neq 2$ então existe um único número real y tal que $2y/(y+1) = x$.*

- x arbitário, prova direta:

$Suposições$	$A \text{ provar}$
$x \neq 2$	$\exists!y[2y/(y+1) = x]$

- Usando a segunda estratégia para $\exists!$:

$Suposições$	$A \text{ provar}$
$x \neq 2$	$\exists y[2y/(y+1) = x \wedge \forall z(2z/(z+1) = x \rightarrow z = y)]$

- Após determinar $y = x/(2-x)$:

$Suposições$	$A \text{ provar}$
$x \neq 2$	$2y/(y+1) = x$
$y = x/(2-x)$	$\forall z(2z/(z+1) = x \rightarrow z = y)]$

Estratégia p/ suposição da forma $\exists!xP(x)$:

Tratar como duas suposições: $\exists xP(x)$, e $\forall y\forall z[(P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z]$.

Exemplo:

Teorema. *Sejam 3 conjuntos A , B e C , sendo A e B não disjuntos, A e C não disjuntos, e A tendo exatamente 1 elemento. Então B e C não são disjuntos.*

- Inicialmente:

<i>Suposições</i>	<i>A provar</i>
$A \cap B \neq \emptyset$	$B \cap C \neq \emptyset$
$A \cap C \neq \emptyset$	
$\exists!x(x \in A)$	

- Usando a estratégia para suposição $\exists!$:

<i>Suposições</i>	<i>A provar</i>
$\exists(x \in A \wedge x \in B)$	$\exists x(x \in B \wedge x \in C)$
$\exists(x \in A \wedge x \in C)$	
$\exists x(x \in A)$	
$\forall y\forall z[(y \in A \wedge z \in A) \rightarrow y = z]$	