RELAÇÕES

Par ordenado:

- $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Produto cartesiano:

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Exemplos:

- Sejam $A = \{\text{azul}, \text{verde}\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.
  $A \times B = \{(\text{azul}, 1), (\text{azul}, 2), (\text{azul}, 3), (\text{verde}, 1), (\text{verde}, 2), (\text{verde}, 3)\}$
- Seja $P =$ o conjunto de todas as pessoas.
  $P \times \mathbf{N} = \{(p, n) \mid p \text{ é uma pessoa e } n \text{ é um número natural}\}$
- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x \text{ e } y \text{ são números reias}\}$

Teorema. *Sejam os conjuntos A, B, e C. Então:*

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
4. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
5. $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

Teorema. *Sejam os conjuntos A e B. Então $A \times B = B \times A$ se, e somente se, $A = \phi$, $B = \phi$ ou $A = B$.*

Conjunto-verdade de $P(x, y)$:

- Suponha que x varia sobre A e y sobre B. Então o Conjunto-verdade de $P(x, y)$ é

$$\{(a, b) \in A \times B \mid P(a, b)\}.$$

Exemplos:

- "x tem y filhos", onde x varia sobre P e y sobre $\mathbf{N}$:

$$\{(p, n) \in P \times \mathbf{N} \mid p \text{ tem } n \text{ filhos}\}$$

- "$y = 2x - 3$", onde x e y variam sobre $\mathbf{R}$:

$$\{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid y = 2x - 3\}$$

Relação:

- Uma relação de A para B é um conjunto $R \subseteq A \times B$.

Exemplos:

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

  $R = \{(1, 3), (1, 5), (3, 3)\}$

- $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > y\}$

- $A = \{1, 2\}$, $B = \mathcal{P}(A)$

  $E = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in y\}$

- $A =$ conjunto dos alunos de CC,
  $D =$ conjunto das disciplinas de CC,
  $P =$ conjunto dos professores de CC

  $M = \{(a, d) \in A \times D \mid$ o aluno a está matriculado em $d\}$

  $M = \{(p, d) \in P \times D \mid$ o professor p leciona $d\}$

Algumas definições:

Seja uma relação R de A para B. Então:

- O **domínio** de R é:

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B[(a,b) \in R]\}$$

- A **imagem** de R é:

$$\text{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A[(a,b) \in R]\}$$

- A **inversa** de R é:

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$$

Outra definição:

Sejam duas relações, R de A para B, e S de B para C. Então:

- A **composição** de S e R é a relação $S \circ R$ de A para C:

$$S \circ R = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B[(a,b) \in R \text{ e } (b,c) \in S]\}$$

Teorema. *Seja R uma relação de A para B, S uma relação de B para C, e T uma relação de C para D. Então:*

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $Dom(R^{-1}) = Im(R)$
3. $Im(R^{-1}) = Dom(R)$
4. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$
5. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$