Notação infixada:

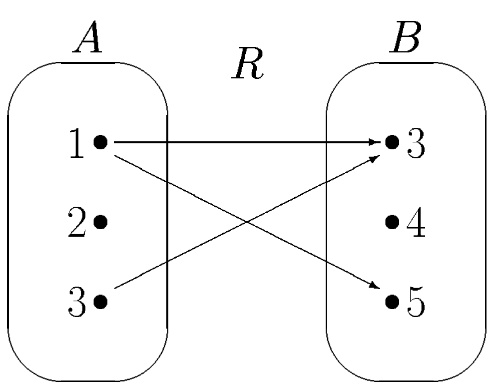
- xRy ao invés de $(x, y) \in R$.

Representação gráfica de uma relação:

- A e B representados por ovais.
- elementos de A e de B representados por pontos, denominados **vértices**, dentro das ovais respectivas.
- xRy representado por uma seta de x para y, denominada **aresta**.

Exemplo: $R = \{(1, 3), (1, 5), (3, 3)\}$

onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $A = \{3, 4, 5\}$.



Graficamente, como se determina:

- Dom(R)?
- Im(R)?
- R^{-1}?
- $S \circ R$?

Relação sobre A:

- uma relação de A para A.

Exemplos:

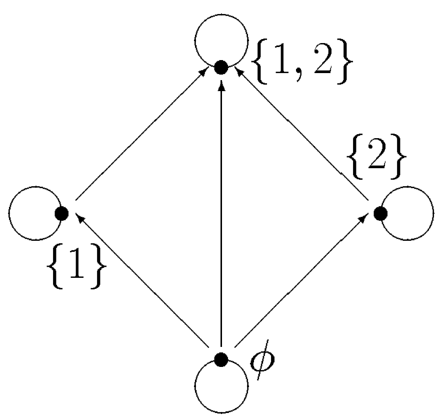
- $A = \{1, 2\}$, $B = \mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
  $S = \{(x, y) \in B \times B \mid x \subseteq y\}$
- A: um conjunto qualquer.
  $i_A = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$
- Seja r um número real positivo.
  $D_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x - y| < r\}$

Representação gráfica de uma relação sobre A:

- representa-se os elementos de A por meio de vértices;
- representa-se xRy por uma seta de x para y – uma aresta.

Exemplo:

- $A = \{1, 2\}$, $B = \mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
  $S = \{(x, y) \in B \times B \mid x \subseteq y\}$
- Graficamente:



(grafo dirigido)

Propriedades de uma relação R sobre A:

- *Reflexividade*: $\forall x \in A(xRx)$
- *Simetria*: $\forall x \in A \forall y \in A(xRy \rightarrow yRx)$
- *Transitividade*:
$$\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A[(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

Na representação gráfica de R sobre A:

- *Reflexividade*: **laços** em todos os vértices.
- *Simetria*: se existe uma aresta de x para y, existe uma aresta de y para x.
- *Transitividade*: se existe uma aresta de x para y e uma aresta de y para z, então existe uma de x para z.

Teorema. *Seja uma relação R sobre A. Então:*

1. *R é reflexiva sse $i_A \subseteq R$*
2. *R é simétrica sse $R = R^{-1}$*
3. *R é transitiva sse $R \circ R \subseteq R$*

Outra Propriedade de uma relação R sobre A:

- *Antissimetria*: $\forall x \in A \forall y \in A[(xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y]$

Exemplos:

- $L = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$
- $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y\}$
- $S = \{(x, y) \in B \times B \mid x \subseteq y\}$, onde $B = \mathcal{P}(\{1, 2\})$

Duas definições importantes:

- Uma relação R (sobre A) é uma **ordem parcial** sse:
  - é reflexiva;
  - é transitiva; e
  - é antissimétrica.

- Uma relação R (sobre A) é uma **ordem total** sse:
  - é uma ordem parcial; e
  - $\forall x \in A \forall y \in A (xRy \vee yRx)$.

Exemplos:

- Seja A qualquer conjunto e $B = \mathcal{P}(A)$.
  $S = \{(x, y) \in B \times B \mid x \subseteq y\}$

- Seja $A = \{1, 2\}$ e $B = \mathcal{P}(A)$.
  $R = \{(x, y) \in B \times B \mid |x| \leq |y|\}$

- $D = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \mid x \text{ é divisível por } y\}$

- $G = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \leq y\}$

Duas definições:

Seja uma ordem parcial R sobre A, $B \subseteq A$ e $b \in B$.

- b é um elemento R-**menor** de B sse $\forall x \in B(bRx)$.

- b é um elemento R-**minimal** de B sse $\neg\exists x \in B(xRb \wedge x \neq b)$.

Exemplos:

- $L = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$.
  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 7\}$.
  $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 7\}$.

- $D = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \mid x \text{ é divisível por } y\}$
  $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- $S = \{(x, y) \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid x \subseteq y\}$
  $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid 2 \in x \wedge 3 \in x\}$
  $\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid 2 \in x \vee 3 \in x\}$

Teorema. *Seja R uma ordem parcial sobre A, e $B \subseteq A$.*

1. *Se B tem um elemento menor, então ele é único. (Assim, pode-se falar n***o menor** *elemento de B, quando ele existe).*
2. *Suponha que b é o menor elemento de B. Então b é um elemento minimal de B; e é o único elemento minimal de B.*
3. *Se R é uma ordem total, e b é um elemento minimal de B, tem b é o menor elemento de B.*

Duas definições:

Seja uma ordem parcial R sobre A, $B \subseteq A$ e $b \in B$.

- b é um elemento R-**maior** de B sse $\forall x \in B(xRb)$.
- b é um elemento R-**maximal** de B sse $\neg\exists x \in B(bRx \wedge x \neq b)$.

Mais duas definições:

Seja uma ordem parcial R sobre A, $B \subseteq A$ e $a \in A$.

- a é um **limite inferior** para B sse $\forall x \in B(aRx)$.
- a é um **limite superior** para B sse $\forall x \in B(xRa)$.

Outras duas definições:

Seja uma ordem parcial R sobre A, $B \subseteq A$ e $a \in A$. Seja S o conjunto de todos os limites superiores para B, e I o conjunto de todos os limites inferiores.

- Se S tem o menor elemento, este é chamado o **menor limite superior** de B *(l.u.b. – least upper bound)*.

- Se I tem o maior elemento, este é chamado o **maior limite inferior** de B *(g.l.b. – greatest lower bound)*.

Exemplos:

- $L = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$.
  $B = \{1/n \mid n \in \mathbf{Z}^+\}$.

- $S = \{(x, y) \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid x \subseteq y\}$
  $\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$

Teorema. *Seja um conjunto A, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$, e $\mathcal{F} \neq \phi$. Então o menor limite superior de $\mathcal{F}$ (na ordem parcial "$\subseteq$") é $\cup\mathcal{F}$, e o maior limite inferior é $\cap\mathcal{F}$.*