FUNÇÕES

Função f de A para B ($f \colon A \to B$):

> *Relação de A para B tal que para todo $a \in A$ existe exatamente um $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

Exemplos:

- $F = \{(1,5), (2,4), (3,5)\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$.

- $G = \{(a, m) \in A \times M \mid m \text{ é a mãe de } a\}$, A: conjunto de todos os alunos da UFMG, M: conjunto de todas as mulheres.

- $H = \{(p, x) \in P \times \mathcal{P}(P) \mid x \text{ é o conjunto de filhos de } p\}$, P: conjunto de todas as pessoas.

- $i_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$, A: um conjunto qualquer.

- $f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x^2\}$.

Seja $f\colon A \to B$. São expressões equivalentes:

- $(a, b) \in f$
- b é o valor de f em a
- b é a imagem de a sob f
- b é o resultado de aplicar f a a
- b é f de a
- $b = f(a)$

$f(a)$ pode ser especificado com uma "regra":

- $h = \{(p, a) \in P \times \mathbf{R}^+ \mid a = h(p)\}$
  $= \{(p, a) \in P \times \mathbf{R}^+ \mid a = \text{altura de } p \text{ em centímetros}\}$.

- $o = \{(e, p) \in E \times P \mid p = o(e)\}$
  $= \{(e, p) \in E \times P \mid \text{o professor } p \text{ é orientador do aluno } e\}$.

- Seja a regra $g(x) = 2x + 3$, para todo $x \in \mathbf{Z}$.
  $g = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \mid y = g(x)\}$
  $= \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$
  $= \{\ldots, (-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 7), \ldots\}$.

- Seja a regra $g(x) = 2x + 3$, para todo $x \in \mathbf{R}$.
  $g = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = g(x)\}$
  $= \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$.

Teorema. *Suponha que f e g sejam funções de A para B. Se $\forall a \in A(f(a) = g(a))$, então $f = g$.*

Duas formas de provar $f = g$:

- Provar "literalmente" $f = g$.
- Usar o teorema acima, ou seja, provar:

$$\forall a \in A(f(a) = g(a)).$$

Domínio e imagem:

Seja uma função $f\colon A \to B$.

- **Domínio** de f: $\mathrm{Dom}(f) = A$.
- **Imagem** de f: $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$.

Diagramas de funções:

- Como os de relações.

Composição de funções:

- Como a de relações.

Teorema. *Suponha duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Então $g \circ f : A \to C$ e, para qualquer a, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.*

Exemplos:

- Sejam $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ definida por $g(x) = 2x + 3$, e $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definida por $f(n) = n^2 - 3n + 1$. Então $g \circ f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, e para todo $n \in \mathbf{Z}$:

  $$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n^2 - 3n + 1) = 2(n^2 - 3n + 1) + 3.$$

Função $f: A \to B$ injetiva (*one-to-one*):

> *f é injetiva se, e somente se,*
>
> $$\neg \exists a_1 \in A \exists a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \wedge a_1 \neq a_2).$$

Função $f: A \to B$ sobrejetiva (*onto*):

> *f é sobretiva se, e somente se,*
>
> $$\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b).$$

Teorema. *Seja $f: A \to B$.*

1. *f é injetiva sse*
$$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2).$$
2. *f é sobrejetiva sse* $\mathrm{Im}(f) = B$.

Exemplo. Seja $A = \mathbf{R} \backslash \{-1\}$, e seja $f: A \to B$ definida por:

$$f(a) = \frac{2a}{a+1}.$$

Prove que f é injetiva, mas não sobrejetiva.

Teorema. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Como já visto, segue-se que $g \circ f : A \to C$.*

1. *Se f e g são ambas injetivas, $g \circ f$ também é.*
2. *Se f e g são ambas sobrejetivas, $g \circ f$ também é.*

Função bijetiva (correspondência um-para-um):

Aquela que é injetiva e sobretiva.

Exemplo. Seja A = conjunto de todos os espectadores de um concerto com lotação esgotada, e S = conjunto de todas as poltronas da sala. Seja $f : A \to S$ definida por:

$$f(a) = \text{poltrona em que } a \text{ está sentado.}$$

Teorema. *Seja $f : A \to B$.*

$$\textit{Se } f \textit{ é bijetiva, então } f^{-1} : B \to A.$$