INDUÇÃO MATEMÁTICA

Para provar $\forall n \in \mathbf{N}\, P(n)$:

Provar:

1. $P(0)$ *(caso base);*
2. $\forall n \in \mathbf{N}[P(n) \to P(n+1)]$ *(passo de indução).*

Exemplos:

Teorema. *Para todo número natural* n,

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Teorema. $\forall n \in \mathbf{N}[3 \mid (n^3 - n)]$.

Qual é maior?

n	n^2	2^n	Qual é maior?
0	0	1	2^n
1	1	2	2^n
2	4	4	empate
3	9	8	n^2
4	16	16	empate
5	25	32	2^n
6	36	64	2^n

Parece que 2^n não perde mais...

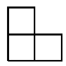
Teorema. $\forall n \geq 5 (2^n > n^2)$.

Indução matemática vai além dos naturais...

Teorema. *Suponha que R é uma ordem parcial sobre um conjunto A. Então todo conjunto finito, não vazio, $B \subseteq A$ tem um elemento R-minimal.*

Teorema. *Para todo $n \geq 3$, se n pontos distintos sobre um círculo são conectados consecutivamente com segmentos de reta, então a soma dos ângulos internos do polígono resultante é $(n-2)180^o$.*

Teorema. *Para qualquer inteiro positivo n, uma grade de quadrados $2^n \times 2^n$, com qualquer um de seus quadrados removido, pode ser coberta com ladrilhos em forma de* L*:*



Recursão:

- **Prova por indução de $\forall n \in \mathbf{N} P(n)$:**
  1. Provar $P(0)$.
  2. Provar que para todo natural n, $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

- **Definição recursiva de uma função $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$:**
  1. Exibir $f(0)$.
  2. Mostrar como calcular $f(n+1)$ a partir de $f(n)$.

Exemplos:

Fatorial:

$fat(0) = 1$;
para todo $n \in \mathbf{N}$, $fat(n+1) = (n+1).fat(n)$.

Exponenciação:

para qualquer $a \in \mathbf{R}$:

$a^0 = 1$;

para todo $n \in \mathbf{N}$, $a^{n+1} = a^n.a$.

Uma somatória:

$f(0) = 1$;

para todo $n \in \mathbf{N}$, $f(n+1) = f(n) + 2^{n+1}$.

Somatórias, em geral:

$\Sigma_{i=m}^{m} a_i = a_m$;

para todo $n \geq m$, $\Sigma_{i=m}^{n+1} a_i = \Sigma_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1}$.

Teorema. *para todo* $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Teorema. *Para todo número real* a *e todos os números naturais* m *e* n, $a_{m+n} = a^m.a^n$.

Problema:

Seja a a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida recursivamente assim:

$a_0 = 0$;

para todo $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Encontre uma fórmula para a_n, e prove que ela está correta.

Teorema. *Para todo* $x > -1$ *e número natural* n, $(1+x)^n > nx$.

Indução forte:

Para provar $\forall n \in \mathbf{N} P(n)$*, provar:*

$$\forall n \in \mathbf{N}[(\forall k < n P(k)) \to P(n)].$$

Exemplos:

Teorema. (Algoritmo da divisão) *Para todos os números naturais* m *e* n*, se* $m > 0$*, então existem números naturais* q *e* r *tais que* $n = mq + r$ *e* $r < m$. (Os números q e r são o *quociente* e o *resto* da divisão de n por m.)

Teorema. *Todo inteiro* $n > 1$ *é primo ou um produto de primos.*

A sequência de Fibonacci:

$F(0) = 0;$
$F(1) = 1;$
para todo $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

Teorema. *Se F_n é o n-ésimo número de Fibonacci, então*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Teorema. (Princípio da boa-ordenação) *Todo conjunto não vazio de números naturais tem um menor elemento.*

Teorema. *$\sqrt{2}$ é irracional.*