Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
*Matemática Discreta* — 1º semestre de 2000
Professor: Newton José Vieira

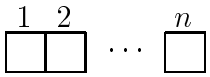
**Lista de Exercícios de Relações de Recorrência**
**Data de entrega:** 28/06/00.

Entregue apenas os de número par ou ímpar.

1. Um certo banco está cobrando 5% de juros ao mês. Tadeu tomou emprestados R$1.000,00, e deve pagar prestações mensais fixas de R$100,00 (a primeira ao final do primeiro mês de empréstimo). Encontre uma relação de recorrência para a dívida de Tadeu ao final do $n$-ésimo mês.

2. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de colocar idênticos Toyotas, Cadillacs e Mercedes em um espaço cujo tamanho é $n$ "unidades", sabendo que Mercedes e Cadillacs ocupam 2 unidades cada um, e que Toyotas ocupam uma unidade cada um.

3. Considere $n$ quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:




   Seja $a_n$ = *número de maneiras de colorir os quadrados, de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes*. Encontre uma relação de recorrência para $a_n$, para cada um dos seguintes casos:

   (a) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou de verde.

   (b) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho, de verde, ou de amarelo.

   (c) Generalize para $k$ cores (incluindo vermelho).

4. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de subir $n$ degraus, se em cada estágio pudermos avançar 1, 3 ou 5 degraus de uma vez.

5. Encontre uma relação de recorrência para o número de pares de coelhos ao fim de $n$ meses, se começamos com 1 par de coelhos e, no final de cada mês, cada par de coelhos com mais de 1 mês de vida tem um par de filhos (1 macho e 1 fêmea).

6. Seja o conjunto de dígitos e letras $X = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e, f, g\}$. Encontre uma relação de recorrência para o número de sequências de $n$ símbolos de $X$, para cada uma das seguintes situações:

   (a) não há letras consecutivas (idênticas ou não).

   (b) não há dígito seguido de letra.

   (c) o número de letras é par.

7. (a) Suponha que uma moeda seja lançada até que apareçam 2 caras, quando então o experimento termina. Encontre uma relação de recorrência para o número de experimentos que terminam no $n$-ésimo lançamento ou antes.

   (b) O mesmo, supondo que o experimento termina apenas quando aparece a terceira cara.

   (c) Generalize para $k$ caras.

8. Resolva as seguintes relações de recorrência:

   (a) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.

9. Resolva as seguintes relações de recorrência:

   (a) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

   (b) $a_1 = 5$, $a_2 = -5$, $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

10. Resolva a relação de recorrência $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$, usando função geradora.

11. Resolva as seguintes relações de recorrência:

    (a) $a_0 = 1$, $a_n - 2a_{n-1} = n^2$ para $n \geq 1$.

    (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$ para $n \geq 2$.

12. Resolva as seguintes relações de recorrência:

    (a) $a_0 = 0$, $a_n + 3a_{n-1} = 2^n$ para $n \geq 1$.

    (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (-2)^n$ para $n \geq 3$.

13. Resolva as seguintes relações de recorrência:

    (a) $a_0 = 1$, $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$ para $n \geq 1$.

    (b) $a_0 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$.

14. Usando relações de recorrência, avalie as seguintes somas:

    (a) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$.

    (b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

    (c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1)$.