Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta — 2º semestre de 2000
Professor: Newton José Vieira
Quarta Lista de Exercícios: **Combinatória Elementar**

Data de Entrega: 07/12/00.

Importante: Em todas as questões deve-se indicar o *processo* usado para determinar cada solução. *O processo é mais importante do que a solução.* "Continhas" são desnecessárias.

1. Duas cartas de baralho são distribuídas para uma pessoa. Para cada $k = 0, 1, 2$ determine o número de distribuições com exatamente k ases.

2. Quantas vezes ocorre a subsequência 13 quando se lista os inteiros de 1 a 1000?

3. Quantas maneiras existem de distribuir um ás, depois uma carta vermelha e, em seguida, uma carta preta? E se, adicionalmente, não aparece nenhum par (duas cartas de mesmo número)?

4. De quantas maneiras se pode arranjar as letras em EMPILHAR:

   (a) no total?

   (b) com todas as vogais consecutivas?

   (c) com M antes de (não necessariamente encostado em) P?

   (d) com exatamente duas letras entre M e P?

5. Quantas regiões quadradas existem em um tabuleiro de xadrez? (Uma região quadrada pode ter lados de tamanho 1 a 8.)

6. Uma moeda é lançada 50 vezes e produz 20 caras. De quantas maneiras isto pode ocorrer?

7. De quantas maneiras se pode colocar 5 homens e 5 mulheres sentados lado a lado, de forma que homens não fiquem juntos?

8. Um aluno tem 25 livros, mas só há espaço para 10 deles em certa prateleira. De quantas formas ele pode encher a prateleira com 10 dos 25 livros?

9. Dez pessoas são selecionadas para compor um time de *softball*, a partir de um grupo de 15 homens e 8 mulheres. Quantos times são possíveis com exatamente 4 mulheres? E com no mínimo 4 mulheres? E com no mínimo tantas mulheres quantos homens?

10. Seis símbolos distintos devem ser transmitidos através de um canal de comunicação. Um total de 12 brancos devem ser inseridos entre os símbolos, com pelo menos 2 brancos entre cada par de símbolos. De quantas maneiras os símbolos e brancos podem ser arranjados?

11. De quantas maneiras se pode distribuir n objetos distintos em n caixas distintas, de forma que nenhuma caixa fique vazia? E de forma que exatamente uma caixa fique vazia?

12. Quantas maneiras existem de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas, ficando exatamente v caixas vazias?

13. Um *closet* contém 6 pares de sapatos. Quantas seleções e quantos arranjos existem de 4 destes sapatos, caso:

    (a) nenhum par completo seja escolhido?

    (b) 2 pares completos sejam escolhidos?

14. Qual a probabilidade de que 20 pessoas escolhidas aleatoriamente façam aniversário em meses diferentes? E que façam aniversário no mesmo mês? Assuma 365 dias no ano.

15. n pauzinhos, cada um de uma cor, são quebrados em duas partes, uma menor e outra menor. Quantas maneiras há de combinar os $2n$ pedaços em n pares de forma que cada par consista de um pedaço menor e um maior?

16. Quantas sequências ternárias de 30 dígitos têm exatamente dez 1's?

17. Cartas são colocadas uma a uma sobre uma mesa. De quantas maneiras pode acontecer do k-ésimo ás ser a r-ésima carta a ser colocada sobre a mesa?

18. Quantos arranjos das letras de EMPERRAMENTO não têm vogais consecutivas?

19. Escreva problemas equivalentes de solução de equações inteiras para:

    (a) Número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas, de forma que nenhuma caixa contenha mais de 2 bolas.
    (b) Número de subconjuntos de 3 elementos tomados de $\{a, b, c, d\}$.
    (c) Número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas, de forma que as duas primeiras caixas contenham um total de p bolas.

20. Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$$

    nas quais exatamente 2 incógnitas são nulas.

21. Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos para o sistema de equações:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{array}\right\} \text{ com } x_k \geq k$$

22. Qual é o coeficiente de $x^9y^3w^6$ em $(x + y + z + w)^{11}$?

23. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

    Dica: use o Teorema Binomial.

24. Derive a identidade $C(2n, n) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)^2$ a partir do Teorema Binomial.

25. Prove, usando raciocínio combinatório:

    (a) $C(2n, n) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)^2$
    (b) $C(m + n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m, k)C(n, r - k)$