Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2000
Professor: Newton José Vieira
Primeira Prova/Solução do professor — 26/09/2000

1. Seja o seguinte argumento:

   Se $2+2=4$*, então a lua é feita de queijo. A lua não é feita de queijo. Portanto,* $2+2 \neq 4$.

   Explicite sua forma lógica e determine se ele é válido.

   Sejam P a afirmativa "$2+2=4$" e Q a afirmativa "a lua é feita de queijo". A forma lógica do argumento é:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

   A tabela a seguir mostra que o argumento é válido: $\neg P$ é verdadeira sempre que $P \to Q$ e $\neg Q$ sãp verdadeiras (verifique *última linha* da tabela).

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	**V**	**V**	**V**

2. Verifique quais dentre as afirmativas seguintes são equivalentes à afirmativa $(P \wedge Q) \to (R \vee S)$:

   (a) $(P \wedge \neg R) \to (\neg Q \vee S)$

   (b) $(\neg R \wedge \neg S) \to (\neg P \wedge \neg Q)$

   (a) $(P \wedge \neg R) \to (\neg Q \vee S) \equiv (P \wedge Q) \to (R \vee S)$, pois:

$$\begin{aligned} (P \wedge \neg R) \to (\neg Q \vee S) &\equiv \neg(P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \vee S) && \text{pois } \alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta \\ &\equiv \neg P \vee \neg\neg R \vee \neg Q \vee S && \text{pela lei de De Morgan} \\ &\equiv \neg P \vee R \vee \neg Q \vee S \end{aligned}$$

$$\equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \vee S) \quad \text{pois } \alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$$
$$\equiv (P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S) \quad \text{pela lei de De Morgan}$$

(b) $(\neg R \wedge \neg S) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \not\equiv (P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)$, pois:

$$\begin{aligned}
(\neg R \wedge \neg S) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q) &\equiv \neg(\neg R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg Q) && \text{pois } \alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta \\
&\equiv R \vee S \vee \neg P \wedge \neg Q && \text{pela lei de De Morgan} \\
&\equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (R \vee S) && \text{pois } \alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta \\
&\equiv (P \vee Q) \rightarrow (R \vee S) && \text{pela lei de De Morgan}
\end{aligned}$$

Observe, então, que se R e S são falsos e um dos dois, P ou Q, é verdadeiro e o outro é falso, $(P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)$ é falso, enquanto que $(\neg R \wedge \neg S) \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ (que equivale a $(P \vee Q) \rightarrow (R \vee S)$) é verdeiro para esta mesma situação.

3. Verifique, para cada afirmativa abaixo, se ela é tautologia, contradição ou contingência.[1]

   (a) Se a vida é curta, então se Deus existe, a vida é curta.

   (b) Se Deus existe ou não existe, então a Terra é azul.

   (c) Se Deus existe e não existe, então a Terra é azul.

   (a) Se a vida é curta, então se Deus existe, a vida é curta.

   Sejam D a afirmativa "Deus existe" e C a afirmativa "a vida é curta". A forma lógica da afirmativa é: $C \rightarrow (D \rightarrow C)$. Ela é uma *tautologia*, pois: para ela ser falsa, C deve ser verdadeira e $D \rightarrow C$ falsa; mas para $D \rightarrow C$ ser falsa, D deve ser verdadeira e C deve ser falsa. Como ficou dito que C deve ser verdadeira, contradição! Logo, a afirmativa em questão não pode ser falsa.

   (b) Se Deus existe ou não existe, então a Terra é azul.

   Sejam D a afirmativa "Deus existe" e A a afirmativa "a terra é azul". A forma lógica da afirmativa é: $(D \vee \neg D) \rightarrow A$. Ela é uma *contingência*, pois: como $D \vee \neg D$ é uma tautologia, $(D \vee \neg D) \rightarrow A$ é verdadeira se A é verdadeira, e é falsa se A é falsa.

[1] O que não é tautologia nem contradição é contingência.

(c) Se Deus existe e não existe, então a Terra é azul.

Sejam D a afirmativa "Deus existe" e A a afirmativa "a terra é azul". A forma lógica da afirmativa é: $(D \wedge \neg D) \rightarrow A$. Ela é uma *tautologia*, pois: como $D \vee \neg D$ é uma contradição, $(D \wedge \neg D) \rightarrow A$ é verdadeira, seja A verdadeira ou falsa.

4. Simplifique as seguintes afirmativas. Quais variáveis são livres e quais são ligadas? Se a afirmativa não tem variáveis ligadas, diga se ela é verdadeira ou falsa.

(a) $0 \in \{x \in \mathbf{Z} \mid 2x - 1 \geq 0\}$

(b) $0 \in \{x \in \mathbf{Z} \mid 2x > y\}$

(c) $0 \notin \{y \mid 6 \notin \{x \mid x \text{ é divisível por } y\}\}$

(a) $0 \in \{x \in \mathbf{Z} \mid 2x - 1 \geq 0\}$ é equivalente a $-1 \geq 0$, que é falsa. A variável x é ligada.

(b) $0 \in \{x \in \mathbf{Z} \mid 2x > y\}$ é equivalente a $y < 0$. A variável x é ligada e variável y é livre.

(c) $0 \notin \{y \mid 6 \notin \{x \mid x \text{ é divisível por } y\}\}$ equivale a $0 \notin \{y \mid 6$ não é divisível por $y\}$ que, por sua vez, equivale a " 6 é divisível por 0", que é falsa. As variáveis x e y são ligadas.

5. Prove que $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$, mostrando a equivalência das afirmativas $x \in (A \backslash B) \backslash C$ e $x \in A \backslash (B \cup C)$.

A equivalência segue de:

$$
\begin{aligned}
x \in (A \backslash B) \backslash C &\equiv x \in A \backslash B \wedge x \notin C && \text{pela def de "}\backslash\text{"} \\
&\equiv x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C && \text{pela def de "}\backslash\text{"} \\
&\equiv x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) && \text{por De Morgan} \\
&\equiv x \in A \wedge x \notin B \cup C && \text{pela def de "}\cup\text{"} \\
&\equiv x \in A \backslash (B \cup C) && \text{elar def de "}\backslash\text{".}
\end{aligned}
$$

6. Explicite as formas lógicas das seguintes afirmativas.

(a) Ninguém gosta daqueles que são antipáticos.

(b) Todos gostam de quem gosta de Maria.

(c) $A \subseteq B$ é condição suficiente para que A e $C \backslash B$ sejam disjuntos.

(a) $\forall x[antipático(x) \to \neg\exists y\, gosta(y, x)]$

(b) $\forall x[gosta(x, Maria) \to \forall y\, gosta(y, x)]$

(c) $$\begin{aligned} A \subseteq B \to A \cap C\backslash B = \emptyset &\equiv \forall x[x \in A \to x \in B] \to \neg\exists x(x \in A \wedge x \in C\backslash B)\text{'} \\ &\equiv \forall x[x \in A \to x \in B] \to \neg\exists x(x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \\ &\equiv \forall x[x \in A \to x \in B] \to \forall x(x \notin A \vee x \notin C \vee x \in B) \\ &\equiv \forall x[x \in A \to x \in B] \to \forall x[(x \in A \wedge x \in C) \to x \in B] \end{aligned}$$

7. Mostre que $\neg\exists x \in AP(x)$ e $\forall x \in A\neg P(x)$ são equivalentes. (*Pista*: observe os lembretes 1 e 2.)

8. Analise as formas lógicas das afirmativas a seguir. Para isto, desvencilhe-se das operações sobre conjuntos (menos "$\in$"), re-expressando as afirmativas utilizando conectivos lógicos.

   (a) $x \in \cup\mathcal{F}\backslash \cap \mathcal{G}$

   (b) $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

   (c) $x \in (\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{i\in I} B_i)$

Lembretes:

1: $\forall x \in AP(x)$ equivale a $\forall x(x \in A \to P(x))$.

2: $\exists x \in AP(x)$ equivale a $\exists x(x \in A \wedge P(x))$.

3: $\cap\mathcal{F}$ é a interseção dos conjuntos da família $\mathcal{F}$: $\{x \mid \forall A \in \mathcal{F}(x \in A)\}$.

4: $\cup\mathcal{F}$ é a união dos conjuntos da família $\mathcal{F}$: $\{x \mid \exists A \in \mathcal{F}(x \in A)\}$.

5: $\mathcal{P}(A)$ é o *conjunto potência* de A.

6: $\cup_{i\in I} A_i = \cup\{A_i \mid i \in I\}$