Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2000
Professor: Newton José Vieira
Terceira Prova — 23/11/2000

Valores das questões: 3 pontos cada uma.

Convenções: vide verso da prova.

1. Seja R uma relação de A para B. Mostre que as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas com provas ou contraexemplos.

   (a) $R \subseteq Dom(R) \times Im(R)$.

   (b) $Dom(R) \times Im(R) \subseteq R$.

2. Classifique cada uma das seguintes relações com respeito às propriedades de reflexividade, simetria e transitividade:

   (a) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
   sendo R uma relação sobre $\{1,2,3\}$.

   (b) $S = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathbf{N})^2 \mid X \subset Y\}$
   sendo S uma relação sobre $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

   (c) $I = \{(p_1,p_2) \in B^2 \mid p_1 \text{ e } p_2 \text{ são irmãos}\}$
   sendo I uma relação sobre B, o conjunto de todos os brasileiros.

3. Seja $A = \mathbf{R} \backslash \{1\}$, e seja $f : A \to A$ definida como segue:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

   (a) Mostre que f é bijetiva (*one-to-one and onto*).

   (b) Mostre que $f \circ f = i_A$.

4. Prove que $0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Continua no verso.

5. Seja a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida recursivamente como segue:

   $a_0 = 2$;

   $a_1 = 5$;

   para todo $n \geq 2$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.

   Prove que para todo $n \in \mathbf{N}$, $a_n = 2^n + 3^n$.

Convenções:

- $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto potência de A.
- $Dom(R)$ é o *domínio* de R.
- $Im(R)$ é a *imagem* (*range*) de R.
- $\mathbf{N}$ é o conjunto dos números naturais.
- $\mathbf{R}$ é o conjunto dos números reais.
- $f \circ g$ é a *composição* de f com g.
- i_A é a *relação de identidade* de A.