Departamento de Ciência da Computação — UFMG
Matemática Discreta — 2º semestre de 2002
Professor: Newton José Vieira
Primeira Prova — 04/12/2002

Escolha 4 questões. Cada questão vale 4 pontos.

1. Considere o conjunto universo como sendo o conjunto de todas as pessoas do mundo. Sejam os conjuntos:

   - $M = \{x : x \text{ é mineiro}\}$
   - $P = \{x : x \text{ adora praia}\}$
   - $C = \{x : x \text{ é criança}\}$
   - $E = \{x : x \text{ estuda na UFMG}\}$

   Que propriedades deve ter uma pessoa para ela pertencer a cada um dos conjuntos abaixo especificados?

   (a) $M \cap (P \cup E)$
   (b) $M - (C \cap E)$
   (c) $M - (C \cup E)$
   (d) $(M \cap \overline{P}) - E$

2. Quais dentre as relações abaixo são relações de equivalência? Quantas classes de equivalência tem a partição induzida por cada uma delas?

   (a) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, b é divisível por a.
   (b) R sobre $\mathbf{R}$ definida por: aRb se, e somente se, $a - b$ é um número inteiro.
   (c) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, $a - b = 1$.
   (d) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, $a \bmod 3 = b \bmod 3$.

3. Prove que, para quaisquer números reais x e y, se $x^2 + y^2 = 13$ e $|y| \neq 3$ então $x \neq 2$.

4. Prove, por indução matemática, que

$$\text{para todo } n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

5. Seja a sequência de Fibonacci, definida recursivamente por:

   $F_0 = 0$;
   $F_1 = 1$;
   para todo $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

   Prove, usando indução matemática, que

$$\text{para todo } n \in \mathbf{N}, \sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}.$$