Departamento de Ciência da Computação — UFMG

Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2002

Professor: Newton José Vieira

Primeira Prova — 04/12/2002

Escolha 4 questões. Cada questão vale 4 pontos.

1. Considere o conjunto universo como sendo o conjunto de todas as pessoas do mundo. Sejam os conjuntos:

   - $M = \{x : x$ é mineiro$\}$
   - $P = \{x : x$ adora praia$\}$
   - $C = \{x : x$ é criança$\}$
   - $E = \{x : x$ estuda na UFMG$\}$

   Que propriedades deve ter uma pessoa para ela pertencer a cada um dos conjuntos abaixo especificados?

   (a) $M \cap (P \cup E)$
   Solução: Mineiro que adora praia ou estuda na UFMG.

   (b) $M - (C \cap E)$
   Solução: Mineiro que não é criança ou que não estuda na UFMG.

   (c) $M - (C \cup E)$
   Solução: Mineiro que não é criança e que não estuda na UFMG.

   (d) $(M \cap \overline{P}) - E$
   Solução: Mineiro que não adora praia e que não estuda na UFMG.

2. Quais dentre as relações abaixo são relações de equivalência? Quantas classes de equivalência tem a partição induzida por cada uma delas?

   (a) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, b é divisível por a.
   Solução: Não é relação de equivalência (não é simétrica).

   (b) R sobre $\mathbf{R}$ definida por: aRb se, e somente se, $a - b$ é um número inteiro.
   Solução: É relação de equivalência. Possui infinitas classes de equivalência.

   (c) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, $a - b = 1$.
   Solução: Não é relação de equivalência (não é reflexiva, simétrica nem transitiva).

   (d) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, $a \bmod 3 = b \bmod 3$.
   Solução: É relação de equivalência. Possui 3 classes de equivalência: uma para cada resto de divisão por 3.

3. Prove que, para quaisquer números reais x e y, se $x^2 + y^2 = 13$ e $|y| \neq 3$ então $x \neq 2$.

   Solução: Sejam x e y números reais arbitrários. Suponha que $x^2 + y^2 = 13$ e $|y| \neq 3$. Será mostrado, por contradição, que $x \neq 2$. Assim, suponha que $x = 2$. Substituindo-se x na equação acima, obtém-se: $2^2 + y^2 = 13$, o que dá $y = \sqrt{9} = 3$, o que contradiz a suposição anterior que $|y| \neq 3$. Logo, se $x^2 + y^2 = 13$ e $|y| \neq 3$, então $x \neq 2$. Como x e y são reais arbitrários, isto vale para quaisquer números reais x e y.

4. Prove, por indução matemática, que

   $$\text{para todo } n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

   Solução: Para $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} 1/i^2 = 1/1^2 = 1 = 2 - 1/1$. Seja $n \geq 1$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{i=1}^{n} 1/i^2 \leq 2 - 1/n$. Segue-se que:

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} 1/i^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} 1/i^2 + 1/(n+1)^2 \\
&\leq (2-1/n) + 1/(n+1)^2 \quad \text{pela hipótese de indução} \\
&= 2 - [(n+1)^2 - n]/n(n+1)^2 \\
&= 2 - [n^2 + 2n + 1 - n]/n(n+1)^2 \\
&= 2 - [n^2 + n + 1]/n(n+1)^2 \\
&= 2 - [n(n+1) + 1]/n(n+1)^2 \\
&= 2 - 1/(n+1) - 1/n(n+1)^2 \\
&< 2 - 1/(n+1) \quad \text{pois } 1/n(n+1)^2 > 0 \text{ (já que } n \geq 1).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n+1} 1/i^2 \leq 2 - 1/(n+1)$. Conclui-se, então, pelo princípio de indução, que $\sum_{i=1}^{n} 1/i^2 \leq 2 - 1/n$ para todo $n \geq 1$.

5. Seja a sequência de Fibonacci, definida recursivamente por:

   $F_0 = 0$;

   $F_1 = 1$;

   para todo $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

   Prove, usando indução matemática, que

   $$\text{para todo } n \in \mathbf{N}, \sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}.$$

   Solução: Para $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} (F_i)^2 = F_0^2 = 0^2 = 0 = 0 \times 1 = F_0 F_1$. Seja $n \geq 0$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}$. Segue-se que:

   $$
   \begin{aligned}
   \textstyle\sum_{i=0}^{n+1} (F_i)^2 &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 + F_{n+1}^2 \\
   &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \quad \text{pela hipótese de indução} \\
   &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\
   &= F_{n+1} F_{n+2} \quad \text{pela definição de } F.
   \end{aligned}
   $$

   Portanto, $\sum_{i=0}^{n+1} (F_i)^2 = F_{n+1} F_{n+2}$. Conclui-se, então, pelo princípio de indução, que $\sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.