Departamento de Ciência da Computação — UFMG

Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2002

Professor: Newton José Vieira

Exame especial — 26/03/2003

1. Seja a sequência de Fibonacci, definida recursivamente por:

   $F_0 = 0;$

   $F_1 = 1;$

   para todo $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

   Prove, usando indução matemática, que

   $$\text{para todo } n \in \mathbf{N}, \sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}.$$

2. De quantas maneiras se pode arranjar as letras AAAABBBCCDEF:

   (a) No total?

   (b) Com todos os A's antes de F?

   (c) Sem B's consecutivos?

3. Avalie a seguinte soma usando função geradora:

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

4. Seja a relação de recorrência:

   $a_0 = 1,$

   $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} - 1$ para $n \geq 1$.

   Encontre uma fórmula fechada para a_n.

5. Dos números 1 a 1000, inclusive, quantos são divisíveis por 7, 9 ou 21? (Observe que os divisíveis por x e y são aqueles divisíveis pelo mínimo múltiplo comum de ambos.)

6. Sabe-se que em certa competição de futebol foram realizadas 20 partidas. Se cada equipe jogou no mínimo 4 partidas, qual o maior número possível de equipes que podem ter participado da competição? (Modele o problema por meio de grafo.)

Veja alguns lembretes no verso.

Lembretes:

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$
- $(1 + x + x^2 + \cdots)^n = C(n-1+0, 0) + C(n-1+1, 1)\ x + \cdots + C(n-1+r, r)\ x^r + \cdots$
- $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n\ (1 + x + x^2 + \cdots)^n$
- $(1 - x^m)^n = \sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\ C(n, k)\ x^{km}$
- Se $g(x)$ é a função geradora para a_n,
  - $xg'(x)$ é a função geradora para na_n.
  - $g(x)/(1-x)$ é a função geradora para $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
  - $(1-x)g(x)$ é a função geradora para $a_n - a_{n-1}$.