Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2004
Professor: Newton José Vieira
Exame Especial — 26/07/2004

Duração: 1 hora e 30 minutos.

Cada questão vale 20 pontos.

1. (a) Faça diagramas de Venn para os conjuntos $(A \cup B) \backslash C$ e $A \cup (B \backslash C)$. Use tais diagramas para concluir sobre qual deste conjuntos é necessariamente um subconjunto do outro.

   (b) Dê um exemplo de conjuntos A, B e C para os quais $(A \cup B) \backslash C \neq A \cup (B \backslash C)$.

2. Encontre uma fórmula equivalente a cada uma das seguintes envolvendo apenas os conectivos "$\neg$" e "$\rightarrow$":

   (a) $P \wedge Q$.

   (b) $P \vee Q$.

3. Suponha que $A \subseteq C$ e que B e C são conjuntos disjuntos. Prove que $x \in A$ é condição suficiente para $x \notin B$.

4. Considere o seguinte teorema incorreto:

   Teorema. Se $\forall x \in A (x \neq 0)$ e $A \subseteq B$ então $\forall x \in B (x \neq 0)$.

   (a) O que está errado com a seguinte "prova"?

   Prova. Seja x um elemento arbitrário de A. Como $\forall x \in A (x \neq 0)$, deduz-se que $x \neq 0$. Além disso, como $A \subseteq B$, segue-se que $x \in B$. Como $x \in B$, $x \neq 0$ e x é arbitrário, conclui-se que $\forall x \in B (x \neq 0)$.

   (b) Mostre um contra-exemplo para o teorema.

5. Seja a seguinte definição recursiva:

   $a_0 = 0$;

   $a_n = 3a_{n-1} + 4$, para $n \geq 1$.

   Prove, por indução matemática que $a_n = 2 \times (3^n - 1)$.