Departamento de Ciência da Computação | ICEx/UFMG
Matemática Discreta | $1^{\underline{o}}$ semestre de 2005
Professor: Newton José Vieira
Segunda Lista de Exercícios | Entrega: 26/04/2005.
Combinatória Elementar

1. Um palíndromo é uma sequência de letras que tem a mesma leitura, da esquerda para a direita, e da direita para a esquerda. Quantos palíndromos de 7 letras existem? E se nenhuma letra aparece mais de duas vezes?

2. De quantas maneiras se pode arranjar as letras em COMPUTAR:
   (a) no total?
   (b) com todas as vogais consecutivas?
   (c) com P antes de T?
   (d) com exatamente duas letras entre P e T?

3. De quantas maneiras se pode arranjar as letras AAABCDE de forma que não fiquem dois A's consecutivos?

4. Determine o número de seleções de 6 letras do alfabeto (que contém 26 letras), tais que nenhuma letra apareça em uma seleção mais de 2 vezes.

5. Mostre que:
   (a) $C(n,k) = \frac{n}{n-k}C(n-1,k)$.
   (b) $C(2n,n)$ é par. (Sugestão: use item (a).)

6. De quantas maneiras se pode arranjar n pessoas em uma mesa circular?

7. De quantas maneiras se pode colocar 4 homens e 4 mulheres em uma fila, de forma que não haja homens consecutivos?

8. Uma companhia faz multiconjuntos de 10 tabletes de chocolate de 3 tipos diferentes. Quantos multiconjuntos são possíveis? E se cada multiconjunto deve ter pelo menos um tablete de cada tipo?

9. Em uma promoção beneficente, 22 pessoas estão disponíveis para exercer diversas atividades. Suponha que há necessidade de 6 pessoas na cozinha, 4 pessoas no balcão de atendimento, 4 pessoas para os caixas, 6 pessoas para vender cartelas de bingo e 2 pessoas responsáveis pela animação. De quantas maneiras é possível fazer tal escalação, supondo que:
   (a) as pessoas do mesmo grupo executam tarefas idênticas?

(b) cada pessoa de um grupo executa uma tarefa diferente, com exceção das pessoas que vendem cartelas de bingo?

10. Seis símbolos distintos devem ser transmitidos através de um canal de comunicação. Um total de 12 brancos devem ser inseridos entre os símbolos, com pelo menos 2 brancos entre cada par de símbolos. De quantas maneiras os símbolos e brancos podem ser arranjados?

11. De quantas maneiras se pode distribuir n objetos distintos em n caixas distintas, de forma que nenhuma caixa fique vazia? E de forma que exatamente uma caixa fique vazia?

12. Quantas maneiras existem de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas, ficando exatamente v caixas vazias?

13. Um *closet* contém 6 pares de sapatos. Quantas seleções e quantos arranjos existem de 4 destes sapatos, caso:

    (a) nenhum par completo seja escolhido?

    (b) 2 pares completos sejam escolhidos?

14. Um *acasalamento* de $2n$ objetos é uma partição em conjuntos de dois elementos. Por exemplo, se $n = 2$, existem 3 acasalamentos: $\{x_1, x_2\}$ e $\{x_3, x_4\}$; $\{x_1, x_3\}$ e $\{x_2, x_4\}$; $\{x_1, x_4\}$ e $\{x_2, x_3\}$. Quantos acasalamentos de $2n$ elementos existem? Em geral, quantas maneiras existem de particionar mn objetos em n conjuntos de m objetos?

15. Quantas maneiras existem de soletrar ABRACADABRA no esquema abaixo?

```
          A
        B   B
      R   R   R
    A   A   A   A
  C   C   C   C   C
A   A   A   A   A   A
  D   D   D   D   D
    A   A   A   A
      B   B   B
        R   R
          A
```

16. Quantas sequências ternárias de 30 dígitos têm exatamente dez 1's?

17. Quantos arranjos das letras de MATHEMATICS não tem vogais consecutivas?

18. Quantas soluções inteiras existem para $2x_1 + x_2 + x_3 = 12$, com

    (a) $x_k \geq 0$?

    (b) $x_k \geq -1$?

    (c) $x_k \geq 2k - 3$?

19. Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$$

nas quais exatamente 2 incógnitas são nulas.

20. Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos para o sistema de equações:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{array}\right\} \text{ com } x_k \geq k$$

21. Qual é o coeficiente de x^{10} em $(5 - 3x)^{40}$?

22. Qual é o coeficiente de x^6yz^2 em $(x + y + z + w)^9$?

23. Prove, por indução, que $C(n + 1, r + 1) = \sum_{k=r}^{n} C(k, r)$.

24. Derive a identidade $C(2n, n) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)^2$ a partir do Teorema Binomial.

25. Prove, usando raciocínio combinatório:

    (a) $C(2n, n) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)^2$

    (b) $C(m + n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m, k)C(n, r - k)$

Funções Geradoras

26. Apresente funções geradoras para os seguintes problemas de equações inteiras:

    (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com x_1, x_2, x_3 ímpares e x_2, x_4 pares.

    (b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_1 + x_2 = 6$ e $x_k \geq 0$.

    (c) $x_1 + x_2 + x_3 < r$, com $k \leq x_k < 2k$.

    (d) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = r$, com $x_k > k$.

27. Encontre a função geradora para o número de maneiras em que o lançamento de 3 dados distintos pode produzir um soma de, no máximo, r.

28. Encontre os coeficientes dos seguintes termos:

    (a) x^{24} em $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4$.

    (b) x^6 em $(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3$.

    (c) x^5 em $(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3$.

29. Encontre funções geradoras para os seguintes a_n:

(a) $a_n = 3n - 4$.
(b) $a_n = n(n-1)$.
(c) $a_n = n^4$.
(d) $a_n = n^2 3^n$.

30. Use as funções geradoras do exercício anterior para avaliar as seguintes somas:

    (a) $-4 + -1 + 2 + \cdots + (3n-4)$.
    (b) $2 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + n(n-1)$.
    (c) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.
    (d) $3 + 2^2 3^2 \cdots + n^2 3^n$.

31. Utilizando funções geradoras, determine o número de soluções inteiras para as seguintes equações:

    (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, com $1 \leq x_i \leq 6$.
    (b) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, com $1 \leq x_1 \leq 5$, $x_2 \geq 2$ e $x_3 \geq 3$.
    (c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$, com $1 \leq x_i \leq 10$.

32. De quantas maneiras se pode distribuir r moedas idênticas a 20 crianças, se cada criança recebe no mínimo 1, mas não mais que 4 moedas?

33. Quantas maneiras existem de distribuir 20 cédulas de 1 real a 10 meninas e r meninos, se cada menina recebe no mínimo 1 real e cada menino recebe no máximo 3 reais?

34. Use função geradora para encontrar o número de maneiras de pintar 20 quartos idênticos de um hotel com 5 cores, se existe tintas das cores azul, cor-de-rosa e verde suficientes para pintar no máximo 3 quartos (para cada uma destas cores).

35. De quantas maneiras se pode distribuir $2n$ bolas idênticas em 4 caixas distintas, de forma que nenhuma caixa contenha mais que n bolas?