Departamento de Ciência da Computação | UFMG
Matemática Discreta | $1^{\underline{o}}$ semestre de 2005
Professor: Newton José Vieira
Primeira Prova | 30/03/2005

Escolha 4 questões. Cada questão vale 4 pontos.

Notação:

$\mathbf{N}$: conjunto dos números naturais ($\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^-$);
$\mathbf{Z}$: conjunto dos números inteiros;
$\mathbf{Z}^+$: conjunto dos números inteiros positivos;
$\mathbf{Z}^-$: conjunto dos números inteiros negativos.
$\mathcal{P}(X)$: conjunto potência de X: $\{Z \mid Z \subseteq X\}$.

---

1. Sejam os conjuntos:

   - $A = \{n : \text{existe } k \in \mathbf{Z} \text{ tal que } -3 < k < 4 \text{ e } n = 2k\}$
   - $B = \{x : x \geq 0 \text{ e } x = 2k + 1 \text{ para algum } k \in A\}$
   - $C = \{1, 2, 3, 4\}$

   Determine os elementos dos conjuntos abaixo:

   (a) $A \cap (B \cup C)$.
   (b) $A - (B \cap C)$.
   (c) $(B - C) \cup \{C\}$.
   (d) $(C - B) \times \{\emptyset\}$.

2. Para cada relação abaixo, diga se ela é reflexiva, se é simétrica e se é transitiva. Para as relações de equivalência, se houver alguma, diga quais são as classes de equivalência da mesma.

   (a) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, existe x tal que $a \leq x \leq b$.
   (b) R sobre $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ definida por: XRY se, e somente se, $X \cap Y = X$.
   (c) R sobre $\mathbf{R}$ definida por: aRb se, e somente se, $a, b \in \mathbf{Z}^-$ ou $a, b \in \mathbf{Z}^+$.
   (d) R sobre o *conjunto das pessoas do mundo* definida por: aRb se, e somente se, a e b nasceram no mesmo país.

Continua no verso.

3. Seja o teorema: *Para todo número natural n, se n^2 é ímpar, então n é ímpar*. Para cada uma das seguintes "provas" deste teorema que esteja *incorreta*, explique o que está errado com ela:

   Prova 1: Seja n um número ímpar. Então $n = 2k+1$ para algum k. Portanto, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, que é ímpar. Logo, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

   Prova 2: Seja n um número par. Então $n = 2k$ para algum k. Portanto, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, que é par. Logo, se n é par, n^2 é par. Portanto, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

   Prova 3: Suponha que n^2 não é um número ímpar. Então $n^2 = 2k$ para algum k. Portanto, $2k$ é um quadrado perfeito, ou seja, $\sqrt{2k}$ é um número natural. Se $\sqrt{2k}$ é ímpar, $\sqrt{2k} = 2m+1$ e, assim, $n^2 = 2k = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Logo, n^2 é ímpar, contrariando a suposição inicial. Portanto, $\sqrt{2k} = n$ não pode ser ímpar. Logo, se n^2 não é ímpar, então n não é ímpar. Assim, se n^2 é ímpar, n é ímpar.

4. Prove, por indução matemática, que para $n \in \mathbf{N}$,

$$b + (b+r) + (b+2r) + \cdots + (b+nr) = (n+1)(2b+nr)/2,$$

   ou seja:

$$\text{para todo } n \in \mathbf{N},\ \sum_{i=0}^{n}(b+ir) = \frac{(n+1)(2b+nr)}{2}.$$

5. Seja a sequência de Fibonacci, definida recursivamente por:

   $F_0 = 0$;

   $F_1 = 1$;

   para todo $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

   Prove, usando indução matemática, que

$$\text{para todo } n \in \mathbf{N},\ F_n < (7/4)^n.$$