Departamento de Ciência da Computação — UFMG

*Matemática Discreta* — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2005

Professor: Newton José Vieira

**Segunda Prova** — 27/04/2005

**Escolha 4 questões. Cada questão vale 4 pontos.**

---

**Veja fórmulas no verso.**

---

1. Quantas maneiras existem de distribuir 8 bombons e 3 balas entre 5 crianças, nos seguintes casos:
   (a) Os bombons são todos idênticos e as balas são todas idênticas.
   (b) Como (a), mas nenhuma criança pode receber mais de uma bala.
   (c) Os bombons são idênticos, mas as balas são distintas.
   (d) Como (c), mas nenhuma criança pode receber mais de uma bala.

2. Considere as letras da palavra MATEMATICA.
   (a) Quantos arranjos existem de suas letras?
   (b) Em quantos arranjos não existem vogais consecutivas?
   (c) Em quantos arranjos as consoantes estão todas consecutivas?
   (d) Em quantos arranjos as vogais estão em ordem alfabética?

3. Sobre os teoremas binomial e multinomial:
   (a) Use o teorema binomial para expandir $(x-2)^4$.
   (b) Qual é o coeficiente de $x^{11}$ em $(5-3x)^{40}$?
   (c) Qual é o coeficiente de $x^{11}yw^8$ em $(x+y+z+w)^{20}$?
   (d) Usando o teorema binomial mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^k \times C(n,k) \text{ é 1 se } n \text{ é par, e é } -1 \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

4. Seja o problema: *encontrar o número de lançamentos de 3 dados distintos que produz uma soma de <u>no máximo</u> 10.* Faça em seqüência:
   (a) Modele tal problema de tal forma que a solução seja o número de soluções em inteiros não negativos de uma equação.
   (b) Encontre uma função geradora para o problema.
   (c) Determine a solução a partir da função geradora.

5. Determine, usando função geradora, uma fórmula fechada para a soma:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1).$$

**Algumas fórmulas:**

- Teorema binomial: $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r$.
- Teorema multinomial: $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ é a soma de todos os termos da forma $C(n; r_1, r_2, \ldots, r_m)x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_m^{r_m}$ tais que $r_1+r_2+\cdots+r_m = n$.

---

- $(1+x+x^2+\cdots)^n = C(n-1+0,0)+C(n-1+1,1)x+C(n-1+2,2)x^2+\cdots$
- $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1+x+x^2+\cdots)^n$.
- $(1-x^m)^n = C(n,0)-C(n,1)x^m+C(n,2)x^{2m}+\cdots+(-1)^nC(n,n)x^{nm}$.
- $1/(1-x) = 1+x+x^2+\cdots$

---

Sejam $g(x)$ a função geradora para $a_n$, e $h(x)$ a função geradora para $b_n$. Então:

- $g(x)/(1-x)$ é a função geradora para $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
- $c_1g(x)+c_2h(x)$ é a função geradora para $c_1a_n+c_2b_n$.
- $(1-x)g(x)$ é a função geradora para $a_n-a_{n-1}$.
- $xg'(x)$ é a função geradora para $na_n$.
- $g(x)h(x)$ é a função geradora para $a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$.