Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2005
Professor: Newton José Vieira
Quarta Lista de Exercícios — Entrega: 21/06/2005.

Introdução à Teoria dos Grafos

1. Quantas arestas têm $K^c_{m,m}$ e K^c_n?

   Solução: $K^c_{m,m}$ tem $2 \times C(m,2) = m(m-1)$ arestas. $K^c_n =$ é o grafo nulo e, portanto, não tem arestas.

2. Uma mulher deve transportar um leão, uma raposa e um coelho de uma margem a outra de um rio, em um barco que só cabe a mulher e mais um dos animais. Se o leão e a raposa, ou a raposa e o coelho, ficarem na margem oposta em que estiver a mulher, em dado instante, o primeiro come o segundo. Este problema pode ser modelado via grafos, criando-se um vértice para cada configuração segura (aquela em que ninguém come ninguém) possível, e uma aresta entre dois vértices se a configuração representada por um puder ser obtida daquela representada pelo outro cruzando-se o rio. Assim feito, um caminho simples do vértice inicial (que representa todos na margem A) ao vértice meta (todos na outra margem) corresponde a uma forma de cruzar o rio com os ditos elementos. Construa o grafo, e mostre todas as formas de cruzar o rio com segurança para a raposa e o coelho.

   Solução:

   Cada vértice terá a forma $\langle x \rangle$, onde x é uma seqüência de símbolos do conjunto $\{M, L, R, C\}$, representando os animais que estão na margem A (M: mulher, L: leão, R: raposa, C: coelho). Existirá uma aresta $\{\langle x \rangle, \langle y \rangle\}$, caso a situação representada por y possa ser obtida a partir daquela representada por x. As arestas não são direcionadas, representando o fato de que se y pode ser obtido a partir de x, x pode ser obtido a partir y (como pode ser facilmente verificado). Com isto, o grafo terá as seguintes arestas:

   $\{\langle M,L,R,C\rangle, \langle L,C\rangle\}$, $\{\langle L,C\rangle, \langle M,L,C\rangle\}$, $\{\langle M,L,C\rangle, \langle C\rangle\}$, $\{\langle M,L,C\rangle, \langle L\rangle\}$,
   $\{\langle C\rangle, \langle M,R,C\rangle\}$, $\{\langle L\rangle, \langle M,L,R\rangle\}$, $\{\langle M,R,C\rangle, \langle R\rangle\}$, $\{\langle M,L,R\rangle, \langle R\rangle\}$,
   $\{\langle R\rangle, \langle M,R\rangle\}$, $\{\langle M,R\rangle, \langle\rangle\}$.

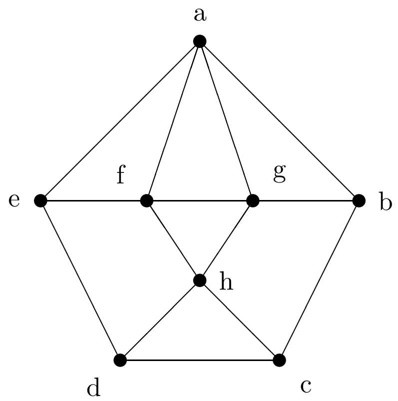
   Existem dois caminhos mais curtos que representam formas de cruzar o rio sem perdas:

   - $\langle M,L,R,C\rangle\langle L,C\rangle\langle M,L,C\rangle\langle C\rangle\langle M,R,C\rangle\langle R\rangle\langle M,R\rangle\langle\rangle$
   - $\langle M,L,R,C\rangle\langle L,C\rangle\langle M,L,C\rangle\langle L\rangle\langle M,L,R\rangle\langle R\rangle\langle M,R\rangle\langle\rangle$

3. Um conjunto de vértices de um grafo é dito *dominante*, se todo vértice que não esteja no conjunto é adjacente a algum vértice do conjunto. Um conjunto *dominante minimal* é um conjunto dominante que não tem nenhum subconjunto próprio que seja conjunto dominante.

   (a) Encontre conjuntos dominantes minimais para K_n e $K_{n,n}$.

   (b) Encontre conjuntos dominantes minimais de tamanhos diferentes para o grafo:



(c) Uma rainha *domina* uma posição em um tabuleiro de xadrez se está na mesma linha, coluna ou diagonal da posição. Descreva um modelo em grafo para o problema de determinar o número mínimo de rainhas necessário para dominar todas as posições do tabuleiro.

Solução:

(a) Um conjunto unitário com qualquer um dos vértices de K_n é conjunto dominante minimal, pois todo vértice de K_n é adjacente a qualquer outro. Cada um dos dois conjuntos de $K_{n,n}$ sem vértices adjacentes é conjunto dominante minimal, pois, além de não terem vértices adjacentes, seus vértices são adjacentes a todos os do outro conjunto.

(b) Exemplos de conjuntos dominantes minimais de tamanhos diferentes para o grafo desenhado acima: $\{a, c\}$ e $\{b, d, f\}$

(c) O problema de determinar o número mínimo de rainhas necessário para dominar todas as posições do tabuleiro pode ser modelado em grafos da seguintes forma:

. cada casa do tabuleiro é representada por um vértice;

. existe uma aresta $\{u, v\}$ se, e somente se, as casas representadas por u e v estão na mesma linha, coluna ou diagonal.

Desta forma, o número mínimo de rainhas necessário para dominar todas as posições do tabuleiro será o tamanho do menor conjunto dominante minimal (ou de um dos menores, se houver mais de um).

4. Quantos subgrafos tem K_n?

Solução: Existem

$$\sum_{k=0}^{n}[C(n,k) \times 2^{C(k,2)}]$$

subgrafos de K_n.

5. Prove que um grafo simples com n vértices não pode ser bipartite se tiver mais de $n^2/4$ vértices. (Sugestão: Suponha que pode ser. Então os vértices podem ser divididos em conjuntos de k e $n - k$ vértices. Conte o número de arestas.)

Solução:

Suponha que o grafo é bipartite. Então seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos de k e $n-k$ vértices, de tal forma que vértices do mesmo conjunto não são adjacentes. Neste caso, o número máximo de arestas é $k \times (n-k)$ (o grafo seria do tipo $K_{k,n-k}$). O valor de k para o qual $k \times (n-k)$ atinge o máximo é dado por $d(k \times (n-k))/dk = 0$, ou seja, por $d(nk - k^2))/dk = 0$, ou ainda, $n - 2k = 0$, o que dá $k = n/2$. Assim, o número máximo de arestas é $(n/2) \times (n/2) = n^2/4$! Assim, tendo o grafo mais de $n^2/4$ arestas, ele não pode ser bipartite.

6. Prove que se G é um grafo simples, então G ou G^c é conexo.

   Solução: Seja G um grafo simples. Suponha que G não é conexo. Sejam C_1, C_2, $\ldots$, C_n os componentes conexos de G ($n \geq 2$). Sejam v_1 e v_2 dois vértices quaisquer de G (e, portanto, de G_c). Se $v_1 \in C_i$ e $v_2 \in C_j$ para $i \neq j$, então $\{v_1, v_2\}$ é uma aresta de G^c. No outro caso, isto é, se $v_1, v_2 \in C_i$ para algum i, então para qualquer vértice v de qualquer componente C_j, onde $j \neq i$, $\{v_1, v\}$ e $\{v, v_2\}$ são arestas de G^c. Logo, para quaisquer vértices distintos v_1 e v_2 de G^c existe caminho (de tamanho 1 ou 2) de v_1 a v_2. Portanto, se G não é conexo, G^c é conexo. Assim, G ou G^c é conexo.

7. Um vértice v é dito ser uma *articulação* em G quando sua remoção desconecta G. Prove que v é uma articulação se, e somente se, existem vértices u e w tais que v está em todo caminho simples entre u e w em G.

   Solução:

   Observe, inicialmente, que se u e w são vértices tais que v está em todo caminho simples entre u e w, então se v for removido, não existirá mais caminho entre u e w. Portanto, neste caso, v é uma articulação. Basta mostrar, então, que: se para quaisquer vértices u e w algum caminho simples entre u e w em G (se existir) não contém v, então v não é uma articulação em G. Mas isto também é óbvio, pois a remoção de v não irá inibir a existência de caminho entre u e w, para quaisquer vértices u e w, caminhos estes que não contêm v.

8. Uma *ponte* em G é uma aresta cuja remoção desconecta G. Prove que e é uma ponte em G se, e somente se, existem dois vértices u e v tais que todos os caminhos simples entre u e v contêm e.

   Solução:

   Similar à da questão anterior.

9. Qual é o maior número possível de arestas em um grafo com 31 vértices, se cada vértice tem grau, no máximo, igual a 3?

   Solução:

   Sabe-se que $\sum_{v \in \mathbf{V}} grau(v) = 2E$. Como o número de vértices de grau ímpar é par, para satisfazer as condições do problema, basta ter $\sum_{v \in \mathbf{V}} grau(v) = 30 \times 3 + 2 = 92$. Assim, tem-se que o número máximo de arestas é $E = 96/2 = 46$.

10. Qual é o maior número possível de vértices em um grafo com 20 arestas, se cada vértice tem grau, no mínimo, igual a 4?

    Solução:

$\sum_{v\in \mathbf{V}} grau(v) = 2E = 2 \times 20 = 40$. O maior número de vértices, consegue-se com todos os vértices de grau mínimo, ou seja $grau(v) = 4$ para todo $v \in \mathbf{V}$. Logo, o maior número possível de vértices, n, será aquele tal que $4n = 40$, o que dá $n = 10$.

11. Prove que sim ou que não:

    (a) É possível ter um grupo de 9 pessoas, cada uma das quais conhece exatamente 5 das outras.

    (b) Em qualquer grupo, o número de pessoas não apertaram as mãos de um número ímpar de pessoas do grupo é par.

    (c) O número de todos os seres humanos (vivos e mortos) que se casaram um número ímpar de vezes é par.

    (d) Em qualquer livraria, o número de livros com um número ímpar de páginas é par.

    Solução:

    (a) Grupo de 9 pessoas, em que cada uma conhece exatamente 5 das outras.

    Modelando cada pessoa como um vértice e o fato de que uma pessoa conhece outra como uma aresta, o problema se reduz à possibilidade de ter um grafo de 9 vértices de grau 5. Isto é impossível, visto que o número de vértices de grau ímpar, em qualquer grafo, é par.

    (b) Em qualquer grupo, o número de pessoas que não apertaram as mãos de um número ímpar de pessoas do grupo é par.

    Modelando cada pessoa como um vértice e o fato de que uma pessoa não apertou as mãos de outra como uma aresta, o problema se reduz a verificar se em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é par. O que é verdade.

    (c) O número de todos os seres humanos (vivos e mortos) que se casaram um número ímpar de vezes é par.

    Modelando cada ser humano como um vértice e o fato de que uma pessoa casou com outra como uma aresta, o problema se reduz a verificar se em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é par. O que é verdade.

    (d) Em qualquer livraria, o número de livros com um número ímpar de páginas é par.

    Obviamente, o número de livros com número ímpar de páginas pode ser par ou ímpar.

12. Prove que se G é um grafo com exatamente 2 vértices de grau ímpar, então ambos os vértices estão no mesmo componente.

    Solução:

    Seja um grafo G com exatamente 2 vértices de grau ímpar. Já que o número de vértices de grau ímpar de um grafo é par, um componente de G, que também é um grafo, não pode ter apenas um dos dois vértices de grau ímpar. Logo, ambos devem estar no mesmo componente.

13. Suponha que um grafo simples G tem n vértices, $n - 1$ dos quais de grau ímpar. Quantos vértices de grau ímpar existem em G^c?

Solução:

O grau de um vértice v em G^c é $(n-1)$ menos o grau de v em G.Mas, $n-1$ vértices têm grau ímpar em G; logo, $n-1$ é par, e estes $n-1$ vértices têm grau ímpar também em G^c (já que um número par menos um número ímpar só pode dar um número ímpar). Evidentemente o outro vértice tem grau par também em G^c.

14. Seja G um grafo regular de grau n, sendo n ímpar. Prove que o número de arestas em G é divisível por n.

    Solução:

    $\sum_{v\in\mathbf{V}} grau(v) = nV$, já que o grafo é regular de grau n. Logo, $nV = 2E$; portanto, $V = 2E/n$ e, como n é ímpar E tem que ser divisível por n (para que V seja um número inteiro).

15. Encontre todos os grafos simples de 4 vértices não isomorfos entre si.

    Solução:

    Abaixo estão listadas as arestas dos 10 grafos existentes (os vértices são identificados por a, b, c e d):

    . $\mathbf{E}_1 = \{\}$
    . $\mathbf{E_2} = \{\{a,b\}\}$
    . $\mathbf{E_3} = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$
    . $\mathbf{E_4} = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$
    . $\mathbf{E_5} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}\}$
    . $\mathbf{E_6} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\}\}$
    . $\mathbf{E_7} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\}$
    . $\mathbf{E_8} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{c,d\}\}$
    . $\mathbf{E_9} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\},\{a,c\}\}$
    . $\mathbf{E_{10}} = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\},\{a,c\},\{b,d\}\}$

16. Quais pares de grafos da Figura 6-23 (página 217) do livro texto são isomorfos? Para os que são dê correspondências um-para-um. Para os que não são mostre porque não são.

17. Um grafo simples G tal que $G \cong G^c$ é dito *auto-complementar.*

    (a) Encontre um grafo auto-completar com 4 vértices, e outro com 5.

    (b) Prove que o número de vértices em um grafo auto-complementar é da forma $4k$ ou $4k+1$.

    Solução:

    (a) Um grafo auto-completar, G, com 4 vértices:

    . $\mathbf{V}_G = \{a,b,c,d\}$
    . $\mathbf{E}_G = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}\}$

    Um grafo auto-completar, H, com 5 vértices:

. $\mathbf{V}_G = \{a, b, c, d, e\}$

. $\mathbf{E}_G = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$

(b) Será mostrado que o número de vértices em um grafo G, auto-complementar, é da forma $4k$ ou $4k+1$. Se o grau de um vértice v em G é $grau(v)$, então o grau de v em G^c é $n-1-grau(v)$, onde n é o número de vértices. Assim, sendo G auto-complementar, tem-se que

$$\sum_{v\in\mathbf{V}_G} grau(v) = \sum_{v\in\mathbf{V}_G} (n-1-grau(v)) = n(n-1) - \sum_{v\in\mathbf{V}_G} grau(v),$$

e, portanto, $\sum_{v\in\mathbf{V}_G} grau(v) = n(n-1)/2$. Mas, como $\sum_{v\in\mathbf{V}_G} grau(v) = 2E_G$, conclui-se que $n(n-1)/2 = 2E_G$ e, assim, $n(n-1) = 4E_G$. Como é impossível ter ambos, n e $n-1$, divisíveis por 2, então, ou n é divisível por 4, ou $n-1$ é divisível por 4, ou seja, $n = 4k$ ou $n-1 = 4k$ (neste último caso, $n = 4k+1$).

18. Quais grafos da Figura 6-38 (página 230) do livro texto são planares?

19. Suponha que uma imersão do grafo simples G no plano tenha 20 faces. Se G é regular de grau 5, quantos vértices contém G?

Solução:

Como G é regular de grau 5, tem-se que $5V = 2E$. A fórmula de Euler diz que $V - E + F = 2$. Com isto, tem-se que $V - 5V/2 + 20 = 2$ e, portanto, $V = 12$.

20. Prove que se G é um grafo planar com k componentes, então qualquer imersão de G satisfaz $V - E + F = k + 1$.

Solução:

Sejam H_1, H_2, ..., H_k os k componentes de G ($k \geq 1$). Para cada componente H_i tem-se que $V_{H_i} - E_{H_i} + F_{H_i} = 2$. Portanto, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{k} (V_{H_i} - E_{H_i} + F_{H_i}) = 2k.$$

Mas, $\sum_{i=1}^{k} V_{H_i} = V_G$, $\sum_{i=1}^{k} E_{H_i} = E_G$ e $\sum_{i=1}^{k} F_{H_i} = F_G + (k-1)$; esta última se deve ao fato de que a face externa é contada uma vez para cada H_i. Logo,

$$V_G - E_G + F_G + (k-1) = 2k,$$

e, portanto, $V_G - E_G + F_G = k + 1$