Departamento de Ciência da Computação — UFMG

Matemática Discreta — $1^{\underline{o}}$ semestre de 2005

Professor: Newton José Vieira

Primeira Prova/Solução do professor — 30/03/2005

Escolha 4 questões. Cada questão vale 4 pontos.

Notação:

$\mathbf{N}$: conjunto dos números naturais $(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^-)$;
$\mathbf{Z}$: conjunto dos números inteiros;
$\mathbf{Z}^+$: conjunto dos números inteiros positivos;
$\mathbf{Z}^-$: conjunto dos números inteiros negativos.
$\mathcal{P}(X)$: conjunto potência de X: $\{Z \mid Z \subseteq X\}$.

---

1. Sejam os conjuntos:

   - $A = \{n : \text{existe } k \in \mathbf{Z} \text{ tal que } -3 < k < 4 \text{ e } n = 2k\}$
   - $B = \{x : x \geq 0 \text{ e } x = 2k + 1 \text{ para algum } k \in A\}$
   - $C = \{1, 2, 3, 4\}$

   Determine os elementos dos conjuntos abaixo:

   (a) $A \cap (B \cup C)$.
   (b) $A - (B \cap C)$.
   (c) $(B - C) \cup \{C\}$.
   (d) $(C - B) \times \{\emptyset\}$.

   Solução: Como $A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 5, 9, 13\}$, segue-se que:

   (a) $A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 13\} = \underline{\{2, 4\}}$.
   (b) $A - (B \cap C) = A - \{1\} = \underline{\{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}}$.
   (c) $(B - C) \cup \{C\} = \{5, 9, 13\} \cup \{C\} = \underline{\{5, 9, 13, \{1, 2, 3, 4\}\}}$.
   (d) $(C - B) \times \{\emptyset\} = \{2, 3, 4\} \times \{\emptyset\} = \underline{\{(2, \emptyset), (3, \emptyset), (4, \emptyset)\}}$.

2. Para cada relação abaixo, diga se ela é reflexiva, se é simétrica e se é transitiva. Para as relações de equivalência, se houver alguma, diga quais são as classes de equivalência da mesma.

   (a) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, existe x tal que $a \leq x \leq b$.
   (b) R sobre $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ definida por: XRY se, e somente se, $X \cap Y = X$.
   (c) R sobre $\mathbf{R}$ definida por: aRb se, e somente se, $a, b \in \mathbf{Z}^-$ ou $a, b \in \mathbf{Z}^+$.
   (d) R sobre o *conjunto das pessoas do mundo* definida por: aRb se, e somente se, a e b nasceram no mesmo país.

   Solução:

   (a) R <u>é reflexiva</u>, pois $a \leq a \leq a$ para todo $a \in \mathbf{N}$. R <u>não é simétrica</u>, pois, em particular, $(1, 2) \in R$, mas $(2, 1) \notin R$. R <u>é transitiva</u>, pois se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, tem-se que $a \leq b \leq c$ e, portanto, $(a, c) \in R$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbf{N}$.

(b) Tem-se que $X \cap Y = X$ se, e somente se, $X \subseteq Y$, como visto em um dos exercícios da primeira lista. Segue-se que a relação <u>é reflexiva</u>, <u>não é simétrica</u> e <u>é transitiva</u>.

(c) R <u>não é reflexiva</u>, pois $(a, a) \notin R$ se $a \in \mathbf{R} - (\mathbf{Z}^- \cup \mathbf{Z}^+)$. R <u>é simétrica</u>, pois para quaisquer $a, b \in \mathbf{R}$, se $(a, b) \in R$, então $a, b \in \mathbf{Z}^-$ ou $a, b \in \mathbf{Z}^+$; logo, $(b, a) \in R$. R <u>é transitiva</u>, pois se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, tem-se que $a, b, c \in \mathbf{Z}^-$ ou $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$; portanto, $(a, c) \in R$.

(d) R <u>é reflexiva</u>, pois cada pessoa nasceu no país em que nasceu. R <u>é simétrica</u>, pois para se as pessoas a e b nasceram no mesmo país, então b e a nasceram no mesmo país. R <u>é transitiva</u>, pois se a e b nasceram no mesmo país e b e c nasceram no mesmo país, a e c nasceram no mesmo país. Suas classes de equivalência são os conjuntos de pessoas que nasceram no mesmo país; ou seja, a cada país corresponde uma classe de equivalência: o conjunto das pessoas que nasceram nele.

3. Seja o teorema: *Para todo número natural n, se n^2 é ímpar, então n é ímpar*. Para cada uma das seguintes "provas" deste teorema que esteja *incorreta*, explique o que está errado com ela:

   <u>*Prova 1:*</u> Seja n um número ímpar. Então $n = 2k + 1$ para algum k. Portanto, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, que é ímpar. Logo, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

   <u>*Prova 2:*</u> Seja n um número par. Então $n = 2k$ para algum k. Portanto, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, que é par. Logo, se n é par, n^2 é par. Portanto, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

   <u>*Prova 3:*</u> Suponha que n^2 não é um número ímpar. Então $n^2 = 2k$ para algum k. Portanto, $2k$ é um quadrado perfeito, ou seja, $\sqrt{2k}$ é um número natural. Se $\sqrt{2k}$ é ímpar, $\sqrt{2k} = 2m + 1$ e, assim, $n^2 = 2k = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Logo, n^2 é ímpar, contrariando a suposição inicial. Portanto, $\sqrt{2k} = n$ não pode ser ímpar. Logo, se n^2 não é ímpar, então n não é ímpar. Assim, se n^2 é ímpar, n é ímpar.

   Solução:

   A "prova 1" está incorreta, visto ela demonstra a <u>recíproca</u> do teorema (*se n é ímpar, então n^2 é ímpar*) pelo método direto. A prova 2 está correta; ela usa o método indireto (método da contrapositiva): supõe que a afirmativa "n é ímpar" é falsa (ou seja, n é par) e mostra que a afirmativa "n^2 é ímpar" é falsa (ou seja, n^2 é par). A "prova 3" está incorreta, visto ela demonstra a <u>recíproca</u> do teorema pelo método indireto (método da contrapositiva).

4. Prove, por indução matemática, que para $n \in \mathbf{N}$,

$$b + (b + r) + (b + 2r) + \cdots + (b + nr) = (n + 1)(2b + nr)/2,$$

ou seja:

$$\text{para todo } n \in \mathbf{N},\ \sum_{i=0}^{n}(b + ir) = \frac{(n + 1)(2b + nr)}{2}.$$

Solução: Inicialmente, observe que $\sum_{i=0}^{0}(b + ir) = b + 0r = b = (0 + 1)(2b + 0r)/2$. Seja $n \in \mathbf{N}$. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{i=0}^{n}(b + ir) = (n + 1)(2b + nr)/2$. Basta, então, provar que $\sum_{i=0}^{n+1}(b + ir) = (n + 2)(2b + nr + r)/2$. De fato:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(b + ir) = \left(\sum_{i=0}^{n}(b + ir)\right) + (b + nr + r).$$

Pela hipótese de indução, segue-se que:

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(b + ir)\right) + (b + nr + r) = \frac{(n + 1)(2b + nr)}{2} + b + nr + r.$$

Prosseguindo, obtém-se desta última:

$$\frac{(n + 1)(2b + nr) + 2b + 2nr + 2r}{2} = \frac{(n + 1)(2b + nr) + (n + 1)r + 2b + nr + r}{2}.$$

E esta última, finalmente, é igual a:

$$\frac{(n + 1)(2b + nr + r) + 2b + nr + r}{2} = \frac{(n + 2)(2b + nr + r)}{2}.$$

5. Seja a sequência de Fibonacci, definida recursivamente por:

    $F_0 = 0$;

    $F_1 = 1$;

    para todo $n \geq 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

    Prove, usando indução matemática, que

    para todo $n \in \mathbf{N}$, $F_n < (7/4)^n$.

Solução: Para $n = 0$ e $n = 1$, tem-se: $F_0 = 0 < 1 = (7/4)^0$ e $F_1 = 1 < 7/4 = (7/4)^1$. Seja $n \geq 1$, e suponha, como hipótese de indução, que $F_k < (7/4)^k$ para $k \leq n$. Basta mostrar que $F_{n+1} < (7/4)^{n+1}$. Pela definição da sequência de Fibonacci, $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, pois $n \geq 1$, e, portanto, $n + 1 \geq 2$. Pela hipótese de indução, segue-se que $F_{n-1} < (7/4)^{n-1}$ e $F_n < (7/4)^n$. Segue-se que $F_{n+1} < (7/4)^{n-1} + (7/4)^n = (7/4)^{n-1}[1 + (7/4)]$. Mas, $1 + (7/4) = 11/4$ e $11/4 = 44/16 < 49/16 = (7/4)^2$. Portanto, $F_{n+1} < (7/4)^{n-1}(7/4)^2 = (7/4)^{n+1}$.