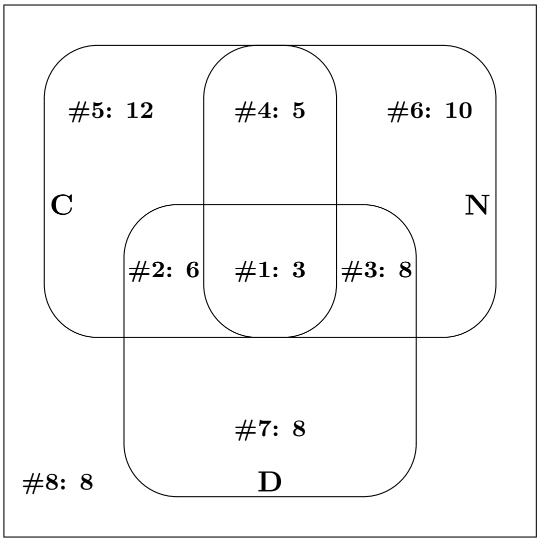
Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2005
Professor: Newton José Vieira — nvieira@dcc.ufmg.br
Primeira Lista de Exercícios/Solução do professor

Conjuntos

1. $A = D = G = H = \{1, 3\}$, $B = E = F = \{1, 2\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$.

2. 

   São dados: $|U| = 60$, $|D| = 25$, $|N| = 26$, $|C| = 26$, $|D \cap C| = 9$, $|D \cap N| = 11$, $|N \cap C| = 8$ e $|D \cap N \cap C| = 3$, sendo U o conjunto das pessoas, D o conjunto das que assistem Discovery, N o das que assistem National Geographic e C o das que assistem Cultura. Cálculo do número de espectadores por região do diagrama:

   $N(\#1) = |D \cap N \cap C| = 3$ (dado).

   $N(\#2) = |D \cap C| - N(\#1) = 9 - 3 = 6$.

   $N(\#3) = |D \cap N| - N(\#1) = 11 - 3 = 8$.

   $N(\#4) = |N \cap C| - N(\#1) = 8 - 3 = 5$.

   $N(\#5) = |C| - N(\#1) - N(\#2) - N(\#4) = 26 - 3 - 6 - 5 = 12$.

   $N(\#6) = |N| - N(\#1) - N(\#3) - N(\#4) = 26 - 3 - 8 - 5 = 10$.

   $N(\#7) = |D| - N(\#1) - N(\#2) - N(\#3) = 25 - 3 - 6 - 8 = 8$.

   $N(\#8) = |U| - N(\#1) - N(\#2) - N(\#3) - N(\#4) - N(\#5) - N(\#6) - N(\#7) = 60 - 3 - 6 - 8 - 5 - 12 - 10 - 8 = 8$.

3. As 5 partições do conjunto $\{a, b, c\}$:

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \quad \begin{array}{c} \{\{a\}, \{b, c\}\} \\ \{\{b\}, \{a, c\}\} \\ \{\{c\}, \{a, b\}\} \end{array} \quad \{\{a, b, c\}\}$$

Relações

4. a) Não é reflexiva, pois um aluno ou aluna não é "irmã" de si próprio. Não é simétrica, pois, dados dois alunos x e y tais que x é irmã de y, se y for do sexo masculino, não se pode dizer que y é irmã de x. Na UFMG existem dois alunos do sexo feminino que são irmãos (chamemo-las de a e b); logo, a relação não é transitiva, pois, se fosse, dado que a é irmã de b e b é irmã de a, a seria (por transitividade) irmã de a!

   b) É reflexiva: $A \subseteq A$ para todo conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$. Não é simétrica: se $A \subseteq B$, não necessariamente $B \subseteq A$; na verdade, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ somente no caso em que $A = B$. É transitiva: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ para quaisquer $A, B, C \subseteq X$.

   c) Não é reflexiva, visto que, sendo $X \neq \emptyset$, nunca se tem $A = \overline{A}$ (observe que X é o universo em consideração). É simétrica: dados A e B tais que $A = \overline{B}$, tem-se que $\overline{A} = \overline{\overline{B}}$, ou seja, $B = \overline{A}$. Não é transitiva: sejam A, B e C tais que $A = \overline{B}$ e $B = \overline{C}$; desta última tem-se que $\overline{B} = C$ e, portanto (já que $A = \overline{B}$), $A = C$; ora, se a relação fosse transitiva, ter-se ia também que $A = \overline{C}$, o que implicaria que $C = \overline{C}$!

   d) Não é reflexiva, pois 0 não é divisível por 0. Não é simétrica, pois 4 é divisível por 2 e 2 não é divisível por 4. É transitiva, pois, para quaisquer número naturais x, y e z, se y é divisível por x ($y = qx$), e z é divisível por y ($z = ry$), então z é divisível por x ($z = qrx$).

5. a) São 366 classes de equivalência induzidas por R_1, uma para cada data possível de aniversário. Por exemplo, para a data "1º de janeiro", existe a classe $\{x \in B \mid x$ nasceu em 1º de janeiro$\}$.

   b) Como $x - y \bmod 10 = 0$ se, e somente se, $x \bmod 10 = y \bmod 10$, existem 10 classe de equivalência induzidas por R_2, uma para cada resto da divisão por 10. A classe de equivalência para o resto r é constituída dos números naturais n tais que $n \bmod 10 = r$.

Funções

6. Funções de $\mathbf{N}$ para $\mathbf{N}$:

   a) Injetora, mas não sobrejetora: $f(n) = 2n$. É injetora, pois se $n_1 \neq n_2$, então $2n_1 \neq 2n_2$. Não é sobrejetora, pois se n é ímpar, não existe k tal que $2k = n$.

   b) Sobrejetora, mas não injetora: $g(n) = n/2$ se n for par, e $g(n) = (n-1)/2$ se n for ímpar. É sobrejetora, pois para qualquer número n, $g(2n) = n$. Não é injetora, já que $g(n) = g(n+1) = n/2$, sendo n par.

   c) Nem injetora, nem sobrejetora: $h(n) = n$ se n for par, e $h(n) = n - 1$ se n for ímpar. Não é injetora, já que $h(n) = h(n+1) = n$ para qualquer número n; e não é sobrejetora, já que não existe n tal que $h(n) = k$, para qualquer número ímpar k.

7. $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tal que $f(n) = n + 1$ é uma função bijetora do conjunto dos números naturais pares para o dos números naturais ímpares, já que: (1) é injetora, pois $n_1 + 1 \neq n_2 + 1$ se $n_1 \neq n_2$; (2) é sobrejetora, pois, para qualquer número ímpar n, $f(n-1) = n$.

Prova de Teoremas

8. Hipótese: $A - B \subseteq C \cap D$ e $a \in A$.

   Suponha que $a \notin B$. Como $a \in A$, segue-se que $a \in A - B$; e como $A - B \subseteq C \cap D$, então $a \in C \cap D$. Portanto, $a \in D$. Conclui-se, então, que se $a \notin D$, então $a \in B$.

9. Hipótese: x é um número real e $x \neq 4$.

   a) A "demonstração" mostra a recíproca do que deveria ser provado, ou seja: se $x = 7$, então $(2x - 5)/(x - 4) = 3$.

   b) Demonstração correta: Supponha que $(2x - 5)/(x - 4) = 3$. Como $x \neq 4$, $2x - 5 = 3(x - 4)$. Assim, $2x - 5 = 3x - 12$ e, portanto, $x = 7$. Conclui-se que se $(2x - 5)/(x - 4) = 3$, então $x = 7$.

10. Hipótese: $A - B \subseteq C$, e x é um elemento qualquer no universo.

    Suponha que $x \in A - C$ e $x \notin B$. Como $x \in A - C$, $x \in A$ e $x \notin C$. De $x \in A$ e $x \notin B$, segue-se que $x \in A - B$; dado que $A - B \subseteq C$, tem-se, então, que $x \in C$. Contradição! Logo não pode ser o caso que $x \in A - C$ e $x \notin B$; conclui-se que se $x \in A - C$, então $x \in B$.

11. Suponha que n é um número inteiro não divisível por 3. Sendo assim, existe um número inteiro q tal que $n = 3q + 1$ ou $n = 3q + 2$. No primeiro caso, tem-se que $n^2 = (3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1$; portanto, $n^2 = 3k + 1$ para um inteiro $k = 3q^2 + 2q$. No segundo caso, $n^2 = (3q + 2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$; portanto, $n^2 = 3k + 1$ para um inteiro $k = 3q^2 + 4q + 1$. Assim, em qualquer caso existe um inteiro k tal que $n^2 = 3k+1$. Conclui-se que se n é um número inteiro não divisível por 3, então $n^2 = 3k+1$ para algum um inteiro k.

12. a) Seja x um elemento arbitrário.

    $$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B && \text{pela definição de complemento} \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B && \text{pela definição de união} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ e } x \in \overline{B} && \text{pela definição de complemento} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} && \text{pela definição de interseção} \end{aligned}$$

    Assim, para todo x, $x \in \overline{A \cup B}$ se, e somente se, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Portanto, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

    b) Seja x um elemento arbitrário.

    $$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B && \text{pela definição de complemento} \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B && \text{pela definição de interseção} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} && \text{pela definição de complemento} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} && \text{pela definição de união} \end{aligned}$$

    Assim, para todo x, $x \in \overline{A \cap B}$ se, e somente se, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Portanto, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

13. Seja um conjunto arbitrário $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Então $X \in \mathcal{P}(A)$ ou $X \in \mathcal{P}(B)$. No primeiro caso, $X \subseteq A$ e, portanto, $X \subseteq A \cup B$. No segundo, como $X \subseteq B$, tem-se também que $X \subseteq A \cup B$. Assim, em qualquer caso, $X \subseteq A \cup B$ e, portanto, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Como X é um elemento arbitrário de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, conclui-se que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

    Nem sempre $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Por exemplo, se $A = \{a\}$ e $B = \{b\}$, então $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ e $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}\} \cup \{\emptyset, \{b\}\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

14. (a) Faça corresponder a cada casal uma casa de pombos, e a cada pessoa escolhida para a coleção um pombo. Então, pelo princípio da casa de pombos, em todas as escolhas possíveis de $n+1$ pessoas, pelo menos um casal é repetido (correspondendo à escolha do casal para a coleção).

(b) Este só tem sentido com $n > 1$ computadores.

Suponha que exista um computador não conectado ao outro; neste caso, cada computador só pode estar conectado com 0 a $n-2$ outros (nenhum computador está conectado a ele mesmo nem àquele que não esteja conectado). Por outro lado, se todo computador está conectado com algum outro, então cada um pode estar conectado com 1 a $n-1$ outros. Nos dois casos, pelo princípio da casa de pombos, existem 2 computadores conectados ao mesmo número de computadores.

Indução Matemática

15. (a) $\sum_{k=0}^{0}(k2^k) = 02^0 = 0$. E $(0-1)2^{0+1} + 2 = -2 + 2 = 0$. Seja $n \in \mathbf{N}$. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{k=0}^{n}(k2^k) = (n-1)2^{n+1} + 2$. Basta, então, mostrar que $\sum_{k=0}^{n+1}(k2^k) = n2^{n+2} + 2$. De fato: $\sum_{k=0}^{n+1}(k2^k) = \sum_{k=0}^{n}(k2^k) + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1}$, pela hipótese de indução, e esta última é igual a $(n-1+n+1)2^{n+1} + 2 = n2^{n+2} + 2$.

(b) $\sum_{i=0}^{0}(0 \times 0!) = 0 = 1 - 1 = (0+1)! - 1$. Seja $n \geq 0$. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{i=0}^{n}(i \times i!) = (n+1)! - 1$. Tem-se: $\sum_{i=0}^{n+1}(i \times i!) = \sum_{i=0}^{n}(i \times i!) + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$, pela hipótese de indução. E $(n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$. Portanto, pelo princípio de indução, $\sum_{i=0}^{n}(i \times i!) = (n+1)! - 1$ para todo $n \geq 0$.

(c) $0^3 - 0 = 0$ que é divisível por 3. Seja n um número natural arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $n^3 - n$ é divisível por 3. Resta mostrar que $(n+1)^3 - (n+1)$ é divisível por 3. Tem-se: $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n$. Isto é divisível por 3, visto que $n^3 - n$ é divisível por 3, pela hipótese de indução, e que $3n^2 + 3n$ também é, o que completa a prova.

(d) No caso de 3 pontos, o polígono é um triângulo, e sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180° = (3-2)180°$. Seja um número natural $n \geq 3$. Suponha, como hipótese de indução, que se n pontos distintos sobre um círculo são conectados consecutivamente com segmentos de reta, então a soma dos ângulos internos do polígono resultante é $(n-2)180°$. Sejam $n+1$ pontos distintos sobre um círculo conectados consecutivamente com segmentos de reta. Deve-se mostrar que a soma dos ângulos internos do polígono resultante é $((n+1)-2)180° = (n-1)180°$. Seja o polígono de n pontos resultante de se retirar 1 ponto qualquer do polígono de $n+1$ pontos. Pela hipótese de indução, ele tem a soma dos ângulos internos igual a $(n-2)180°$. A soma dos ângulos internos do polígono de $n+1$ pontos é igual ao de n pontos mais os ângulos internos do triângulo cujos vértices são o ponto retirado mais os dois adjacentes a ele, ou seja, $(n-2)180 + 180 = (n-2+1)180 = (n-1)180°$. Isto conclui a demonstração.

16. (a) Observe, inicialmente, que $F_1 = 1$ e $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$, e também que $F_2 = 1$ e $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$. Seja $k \geq 2$. Suponha, como hipótese de indução, que o enunciado seja verdadeiro para $1 \leq n \leq k$. Como $k+1 \geq 3$, tem-se

que, por definição, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$. Aplicando-se a hipótese de indução, tem-se então que:

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

e, portanto,

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

É fácil verificar que:

$$1+\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \text{ e } 1+\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

e, portanto,

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}.$$

o que conclui a demonstração.

(b) $\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = 1 = 2-1 = F_3-1$. Seja $n \geq 1$, e suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2}-1$. Segue-se que $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1} = F_{n+2}-1+F_{n+1}$, pela hipótese de indução. Como $n \geq 1$, a definição diz que $F_{n+2}+F_{n+1} = F_{n+3}$. Portanto, $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+3}-1$. Isto conclui a prova.

(c) $F_1 = 1 < 7/4$ e $F_2 = 1 < 49/16 = (7/4)^2$. Seja $n \geq 2$. Suponha, como hipótese de indução, que $F_k < (7/4)^k$ para $1 \leq k \leq n$. Tem-se: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, pela definição, já que $n \geq 2$. Pela hipótese de indução, $F_n < (7/4)^n$ e $F_{n-1} < (7/4)^{n-1}$. Logo, $F_{n+1} < (7/4)^n + (7/4)^{n-1}$, ou seja, $F_{n+1} < (7/4)^{n-1}((7/4)+1)$. Como $(7/4)+1 = 11/4 = 44/16$ e $(44/16) < (49/16) = (7/4)^2$, segue-se que $(7/4)^{n-1}((7/4)+1) < (7/4)^{n-1}(7/4)^2 = (7/4)^{n+1}$. Portanto, $F_{n+1} < (7/4)^{n+1}$.

(d) $\sum_{i=1}^{1}(F_i)^2 = F_1^2 = 1^2 = 1 = 1\times 1 = F_1F_2$. Seja $n \geq 1$. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{i=1}^{n}(F_i)^2 = F_nF_{n+1}$. Tem-se, então: $\sum_{i=1}^{n+1}(F_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(F_i)^2 + (F_{n+1})^2$. Pela hipótese de indução, segue-se que $\sum_{i=1}^{n+1}(F_i)^2 = F_nF_{n+1} + (F_{n+1})^2 = F_{n+1}(F_{n+1}+F_n)$. Como $n \geq 1$, $F_{n+1}+F_n = F_{n+2}$ e, portanto, $\sum_{i=1}^{n+1}(F_i)^2 = F_{n+1}F_{n+2}$, o que conclui a demonstração.